

### ■ Applications directes du cours

#### Ex-T3.1 Vrai/Faux

Justifier les réponses et rectifier les affirmations fausses si possible.

- 1) L'énergie interne d'un gaz ne dépend que de la température.
- 2) Au cours d'une transformation monobare entre deux états d'équilibre, le transfert thermique est égal à la variation d'enthalpie.
- 3) La température d'un corps pur augmente quand on lui fournit un transfert thermique ( $Q > 0$ ).
- 4) La température d'un système isolé reste constante.
- 5) La loi de Laplace est valable pour une adiabatique.
- 6) Un système fournit adiabatiquement du travail :
  - a) Sa température ne varie pas.
  - b) Son énergie interne diminue.

**Rép :** 1) Faux. Le gaz doit être soit parfait ou au moins un gaz de Joule ; 2) Vrai ; 3) Faux. Par exemple au cours d'une détente isotherme d'un GP, le gaz fournit du travail, reçoit du transfert thermique, et sa température ne varie pas ; 4) Faux. D'après le premier principe  $\delta U = 0$ , mais  $U$  n'est pas fonction que de la température en général, donc  $T$  n'est pas forcément constante. Pour GP en revanche, le résultat est vrai (1<sup>e</sup> loi de Joule) ; 5) Faux. Il faut que l'adiabatique soit quasistatique et mécaniquement réversible ; 6.a) Faux. Une adiabatique n'est *pas* une isotherme ; 6.b) Vrai :  $W < 0$  et  $Q = 0$ .

#### Ex-T3.2 Calculs de $W$ et $Q$ (Expressions à savoir établir rapidement / connaître)

Dans le cas d'un gaz parfait, rappeler les expressions de  $\Delta U$  et  $\Delta H$  puis exprimer les travaux  $W$  et transferts thermiques  $Q$  pour les transformations suivantes en fonction de  $\gamma$ ,  $n$ ,  $R$ ,  $V$ ,  $T$  et  $P$ . On notera  $\{P_1, V_1, T_1\}$  l'état initial du gaz parfait subissant la transformation et  $\{P_2, V_2, T_2\}$  son état final.

**Rép :** ► Sol. p. 14

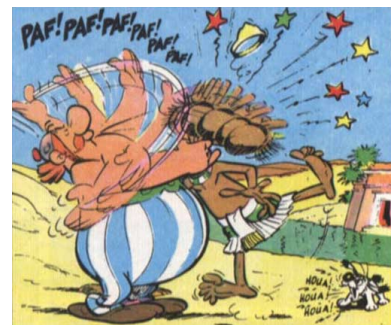
### ■ Bilans énergétiques et transformations thermodynamiques

#### Ex-T3.3 Vitesse des « baffes » d'Obélix

Imaginez qu'Obélix vous gifle ! Vous ressentez une rougeur à la joue. La température de la région touchée a varié de  $1,8^\circ\text{C}$ .

En supposant que la masse de la main qui vous atteint est de  $1,2\text{ kg}$  et que la masse de la peau rougie est de  $150\text{ g}$ , estimez la vitesse de la main juste avant l'impact, en prenant comme valeur de la capacité thermique massique de la peau de la joue :  $c_{\text{peau}} = 3,8\text{ kJ}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$ .

**Rép :**  $v = \sqrt{\frac{2m_{\text{peau}}c_{\text{peau}}\Delta T}{m_{\text{main}}}} = 41,4\text{ m}\cdot\text{s}^{-1} = 149\text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$



#### Ex-T3.4 Chauffage d'un gaz à l'aide d'un élément électrique

Soit un système piston-cylindre contenant  $V_1 = 0,5\text{ m}^3$  d'azote à  $P_1 = 400\text{ kPa}$  et à  $\theta_1 = 27^\circ\text{C}$ .

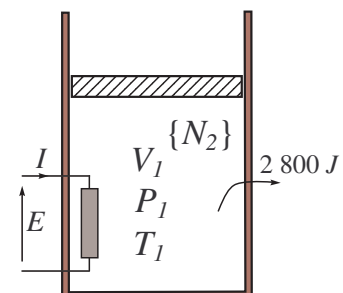
L'élément chauffant électrique est allumé, et un courant  $I = 2\text{ A}$  y circule pendant  $\tau = 5\text{ min}$  sous la tension  $E = 120\text{ V}$ .

L'azote se détend de manière isobare. Au cours de cette transformation, l'ensemble {gaz, cylindre, élément chauffant} cède à l'extérieur un transfert thermique  $Q_{\text{ext}} = 2800\text{ J}$ .

Déterminer la température finale  $T_2$  de l'azote.

**Données :**  $M(N_2)$  est supposée connue ; capacité thermique massique à pression constante du diazote :  $c_P = 1,039\text{ kJ}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$ .

**Rép :**  $T_2 = 329,7\text{ K}$



**Solution Ex-T3.2****Propriétés :**

• La 1<sup>e</sup> loi de Joule s'applique *quelle que soit la transformation* :  $\Delta U_{GP} = C_V \cdot \Delta T = \frac{nR}{\gamma - 1} \cdot \Delta T$

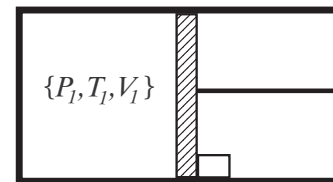
• La 2<sup>e</sup> loi de Joule s'applique *quelle que soit la transformation* :  $\Delta H_{GP} = C_P \cdot \Delta T = \frac{\gamma nR}{\gamma - 1} \cdot \Delta T$

**Rq :** On a donc toujours, *pour un Gaz Parfait* :  $\Delta H_{GP} = \gamma \cdot \Delta U_{GP}$

Transf <sup>o</sup>	W	Q
Isobare	$W = -P_1 \Delta V$	$Q = \Delta H = C_P \cdot \Delta T = \frac{nR\gamma}{\gamma - 1} \cdot (T_2 - T_1)$
Isotherme	$W = -nR \cdot T_1 \cdot \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = nR \cdot T_1 \cdot \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right)$	$Q = \Delta U - W$
Isochore	$W = 0$	$Q = \Delta U = C_V \cdot \Delta T = \frac{nR}{\gamma - 1} \cdot (T_2 - T_1)$
Adiabatique	$W = \Delta U = C_V \cdot \Delta T = \frac{nR}{\gamma - 1} \cdot (T_2 - T_1)$	$Q = 0$

**Ex-T3.5 Transformation adiabatique**

Un Gaz Parfait monoatomique est enfermé dans un cylindre fermé par un piston dans les conditions  $\{P_1, T_1, V_1\}$ . L'ensemble est adiabatique. La pression atmosphérique, notée  $P_0$ , est telle que  $P_0 > P_1$ . On libère brusquement le piston.



**1)** La transformation est-elle seulement adiabatique? Exprimer le travail des forces pressantes qu'il reçoit en fonction de  $P_0$ ,  $V_1$  et  $V_F$ , volume final qu'il occupe.

**2)** Donne l'expression qui relie les variations d'énergie interne  $\Delta U$  et d'enthalpie  $\Delta H$  au coefficient  $\gamma$ . Quelle est la valeur de  $\gamma$  pour le gaz parfait considéré? En déduire  $\Delta U$  et  $\Delta H$  en fonction des seules données  $P_1$ ,  $V_1$ ,  $T_1$  et  $T_F$ , température finale du gaz parfait.

**3)** Exprimer  $V_F$  et  $T_F$  à l'équilibre final en fonction des seules données  $P_1$ ,  $V_1$ ,  $T_1$  et  $P_0$ .

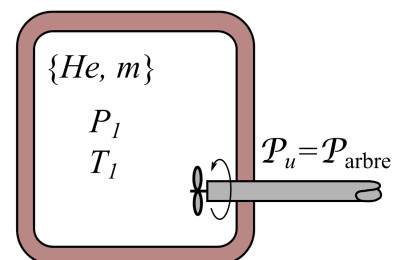
**Rép :** **1)**  $W = -P_0(V_F - V_1)$ ; **2)**  $\Delta U = \Delta U_{GPM} = \frac{3}{2} \frac{P_1 V_1}{T_1} (T_F - T_1)$  et  $\Delta H = \gamma \Delta U$ ; **3)**  $V_F = \frac{2P_0 + 3P_1}{5P_0} V_1$  et  $T_F = \frac{2P_0 + 3P_1}{2P_1} T_1$

**Ex-T3.6 Utilisation d'un agitateur**

Un réservoir rigide et adiabatique (calorifugé) contient  $m = 1 \text{ kg}$  d'hélium à la température  $T_1 = 300 \text{ K}$  et à la pression  $P_1 = 300 \text{ kPa}$ .

L'hélium est brassé à l'aide d'un agitateur de puissance utile  $15 \text{ W}$ . On le fait fonctionner pendant  $\tau = 30 \text{ min}$ . Déterminer la température finale  $T_2$  et la pression finale  $P_2$  de l'hélium.

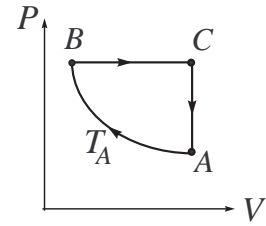
**Donnée :** capacité thermique (moy.) à volume constant de l'hélium :  $c_V = 3,1156 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ .



**Rép :**  $T_2 = 308,7 \text{ K}$ ;  $P_2 = 308,7 \text{ kPa}$

**Ex-T3.7** transformation cyclique

Une mole de GPM contenue dans un cylindre décrit de manière quasi-statique et mécaniquement réversible le cycle ABCA décrit ci-contre. L'évolution AB est isotherme à la température  $T_A = 301 \text{ K}$ . En A,  $P_A = 1,0 \text{ bar}$ . L'évolution BC est isobare à la pression  $P_B = 5,0 \text{ bars}$ . L'évolution CA est isochore.



- 1) Calculer les volumes  $V_A$ ,  $V_B$  et  $V_C$  et la température  $T_C$ .
- 2) Calculer le travail et le transfert thermique reçus par le gaz au cours de chacune des évolutions AB, BC et CA. Calculer leur somme et commenter.

**Rép :** 1)  $V_A = V_C = 25 \text{ L}$ ;  $V_B = 5 \text{ L}$ ;  $T_C \simeq 1500 \text{ K}$ ; 2)  $W_{AB} = -RT_A \ln \frac{V_B}{V_A} = 4,03 \text{ kJ}$ ;  $Q_{AB} = -W_{AB}$ ;  $W_{BC} = P_B(V_A - V_C) = -10 \text{ kJ}$ ;  $Q_{BC} = \Delta U_{BC} - W_{BC} = 25 \text{ kJ}$ ;  $W_{CA} = 0 \text{ J}$ ;  $Q_{CA} = \Delta U_{CA} = C_{Vm}(T_A - T_C) = -15 \text{ kJ}$  — on vérifie que  $\Delta U_{\text{cycle}} = U_A - U_A = 0$  car  $\Delta U_{\text{cycle}} = W_{\text{cycle}} + Q_{\text{cycle}} = W_{AB} + W_{BC} + W_{CA} + Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CA} = 0$ .

**Ex-T3.8**

Une mole de gaz réel monoatomique d'équation d'état  $\left(P + \frac{a}{V^2}\right) V = RT$  et d'énergie interne  $U = \frac{3RT}{2} - \frac{a}{V}$  décrit le même cycle que dans l'**Ex-T3.7**.

On donne  $T_A = 301 \text{ K}$ ;  $V_A = 5,0 \text{ L}$ ;  $V_B = 0,50 \text{ L}$  et  $a = 0,135 \text{ m}^6 \cdot \text{Pa} \cdot \text{mol}^{-2}$ .

- 1) Calculer  $P_A$ ,  $P_B$ ,  $P_C$  et  $T_C$ .
- 2) Calculer le travail et le transfert thermique reçus par le gaz au cours de chacune des évolutions AB, BC et CA. Calculer leur somme et commenter.

**Rép :** 1)  $P_A = 4,95 \text{ bars}$ ,  $P_B = P_C = 44,6 \text{ bars}$  et  $T_C = 2688 \text{ K}$ ; 2)  $W_{AB} = RT_A \ln \frac{V_A}{V_B} + a\left(\frac{1}{V_A} - \frac{1}{V_B}\right) = 5,52 \text{ kJ}$ ;  $Q_{AB} = RT_A \ln \frac{V_B}{V_A} = -5,76 \text{ kJ}$ ;  $W_{BC} = P_B(V_B - V_C) = -20,1 \text{ kJ}$ ;  $Q_{BC} = 50,1 \text{ kJ}$ ;  $W_{CA} = 0 \text{ kJ}$ ;  $Q_{CA} = \Delta U_{CA} = \frac{3}{2}R(T_A - T_C) = -29,8 \text{ kJ}$

**Ex-T3.9** Comparaison de deux évolutions possibles entre deux états

Un récipient de volume  $V_A = 5 \text{ L}$  fermé par un piston contient  $n = 0,5 \text{ mol}$  de gaz parfait, initialement à la température  $T_A = 287 \text{ K}$ . On porte de façon quasi statique le volume du gaz à une valeur  $V_B = 20 \text{ L}$ , à la température  $T_B = 350 \text{ K}$ . On donne pour ce gaz le coefficient  $\gamma = 1,4$ . Le passage de A à B s'effectue de deux manières différentes :

- évolution (a) ( $A \rightarrow C \rightarrow B$ ) : chauffage isochore de  $287 \text{ K}$  à  $350 \text{ K}$  (transformation  $A \rightarrow C$ ) puis détente isotherme de  $V_A$  à  $V_B$  à la température  $T_1 = 350 \text{ K}$  (transformation  $C \rightarrow B$ );
- évolution (b) ( $A \rightarrow D \rightarrow B$ ) : détente isotherme de  $V_A$  à  $V_B$  à la température  $T_2 = 287 \text{ K}$  (transformation  $A \rightarrow D$ ) puis chauffage isochore de  $287 \text{ K}$  à  $350 \text{ K}$  (transformation  $D \rightarrow B$ ).

- 1) Représenter les deux évolutions précédentes en coordonnées de Clapeyron (= dans le diagramme  $(P, V)$ ).
- 2) Exprimer puis calculer le travail  $W_{(a)}$  et le transfert thermique  $Q_{(b)}$  reçus par le gaz ainsi que la variation d'énergie interne  $\Delta U_{(a)}$  du gaz lors de la première série de transformations.
- 3) Exprimer puis calculer le travail  $W_{(b)}$  et le transfert thermique  $Q_{(b)}$  reçus par le gaz ainsi que la variation d'énergie interne  $\Delta U_{(b)}$  du gaz lors de la seconde série de transformations.
- 4) Comparer les deux possibilités d'évolution de A à B. Conclusion ?

**Rép :** 2)  $W_{(a)} = nRT_1 \ln \frac{V_A}{V_B} = -2017 \text{ J}$ ;  $\Delta U_{(a)} = \frac{nR}{\gamma-1}(T_1 - T_2) = 655 \text{ J}$ ;  $Q_{(a)} = \Delta U_{(a)} - W_{(a)} = nR\left(\frac{T_1 - T_2}{\gamma-1} - T_1 \ln \frac{V_A}{V_B}\right) = 2672 \text{ J}$ ; 3)  $W_{(b)} = -1654 \text{ J}$ ;  $\Delta U_{(b)} = \Delta U_{(a)}$ ;  $Q_{(b)} = \Delta U_{(b)} - W_{(b)} = 2309 \text{ J}$ ; 4)  $\Delta U_{(b)} = \Delta U_{(a)}$  puisque la variation d'une fonction d'état entre deux états thermodynamiques données ne dépend pas du « chemin » suivi pour aller de l'état initial à l'état final. Par contre, le travail et le transfert thermiques, qui ne sont pas des fonctions d'états, caractérisent les transformations entre A et B :  $W_{(a)} \neq W_{(b)}$  et  $Q_{(a)} \neq Q_{(b)}$ .

**Ex-T3.10** Gaz de Joule et Détente de Joule-Gay Lussac

Soit une masse  $m$  d'un gaz réel satisfaisant à l'équation d'état :  $P(V - b) = nRT$  avec  $b =$

$5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$ . On donne deux états de cette masse :  $\{P_2 = 50 \text{ bars}, V_2 = 4,57 \cdot 10^4 \text{ m}^3\}$  et  $\{P_1 = 500 \text{ bars}, V_1\}$ .

- 1) Exprimer les coefficients thermoélastiques  $\alpha$  et  $\chi_T$  ( $\rightarrow$  Cf Cours T1). Comparer avec les expressions obtenues pour le gaz parfait.
- 2) Un tel gaz est appelé gaz de Joule car il vérifie la première loi de Joule. La rappeler.
- 3) Ce gaz est situé dans un cylindre rigide adiabatique à deux compartiments inégaux, dont il occupe le compartiment (1), le vide régnant dans le compartiment (2). On perce un trou entre les deux compartiments. Le gaz passe des conditions initiales  $\{P_1, V_1, T_1\}$  aux conditions finales  $\{P_2, V_2, T_2\}$  (avec  $V_2$  le volume total (1)+(2)).  $\rightarrow$  (a) Calculer la variation d'énergie interne; (b) en déduire  $T_2$  littéralement puis  $V_1$  numériquement.

Rép : 1)  $\alpha = \frac{1}{T}$  et  $\chi_T = \frac{1}{V} \frac{V-b}{P}$ ; 3)  $V_1 = 4,52 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3$ .

### Ex-T3.11 Transformations adiabatiques

Une mole de GP de capacité thermique molaire à volume constant  $C_m = \frac{5}{2} R$  est enfermé dans un cylindre vertical calorifugé fermé par un piston mobile calorifugé de section  $S = 0,01 \text{ m}^2$  en contact avec une atmosphère extérieure à la pression constante  $P_0 = 1 \text{ bar}$ .

- 1) On pose sur le piston une masse  $M = 102 \text{ kg}$  et on laisse le système évoluer. Déterminer la pression  $P_1$  et la température  $T_1$  lorsqu'on a atteint le nouvel équilibre (état 1).
- 2) À partir de l'état 1, on enlève la masse  $M$  et on laisse le système évoluer. Déterminer la pression  $P_2$  et la température  $T_2$  lorsqu'on a atteint le nouvel état d'équilibre (état 2).

Rép : 1)  $P_1 = P_0 + \frac{Mg}{S}$ ;  $T_1 = \frac{9}{7} T_0$ ; 2)  $P_2 = P_0$  et  $T_2 = \frac{54}{49} T_0$

## ■ Calorimétrie

### Ex-T3.12 Calorimétrie pratique

On veut remplir une baignoire de 100 litres d'eau à  $32^\circ\text{C}$ . On dispose pour cela de deux sources, l'une d'eau froide à  $18^\circ\text{C}$ , l'autre d'eau chaude à  $60^\circ\text{C}$ .

Si on néglige la capacité thermique de la baignoire et les diverses pertes thermiques, quel volume doit-on prélever à chacune des deux sources ?

Donnée : la masse volumique de l'eau est censée être connue...☺

Rép :  $V_{\text{eau chaude}} = 33,3 \text{ L}$

### Ex-T3.13 Échanges thermiques dans un calorimètre

Un calorimètre de capacité calorifique  $C_{cal} = 209 \text{ J.K}^{-1}$  contient une masse d'eau  $m = 300 \text{ g}$  à la température  $\theta = 18^\circ\text{C}$  en équilibre thermique avec le vase intérieur. On introduit alors les masses : (1)  $m_1 = 50 \text{ g}$  de cuivre à  $\theta_1 = 30^\circ\text{C}$ , (2)  $m_2 = 30 \text{ g}$  de plomb à  $\theta_1 = 80^\circ\text{C}$  et (3)  $m_3 = 80 \text{ g}$  de fer à  $\theta_1 = 50^\circ\text{C}$ .

$\rightarrow$  Quelle est la température finale  $\theta_f$  d'équilibre (la donner en degrés Celsius et en degré Kelvin) ?

Données : les capacités thermiques massiques sont :  $c_{\text{pb}} = 129,5 \text{ J.K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ ;  $c_{\text{Fe}} = 452 \text{ J.K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ ;  $c_{\text{Cu}} = 385 \text{ J.K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ ;  $c_{\text{eau}} = 4185 \text{ J.K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ .

Rép :  $\theta_f = 19^\circ\text{C}$ ,  $T_F = 292 \text{ K}$

### Ex-T3.14 Fuites thermiques

Un récipient et le liquide qu'il contient ont une capacité thermique totale  $C$ . L'ensemble se refroidit au contact de l'atmosphère extérieure de température  $T_e$ .  $T_0$  est la température initiale du système,  $T$  la température à l'instant  $t$ . La puissance de fuite est proportionnelle à l'écart entre la température du récipient et la température extérieure. Soit  $a$ , le coefficient de proportionnalité ( $a > 0$ ).

- 1) Donner l'expression de  $\delta Q$  le transfert thermique reçu par le récipient pendant  $dt$ .
- 2) Déterminer  $T(t)$ .
- 3) AN :  $T_0 = 20^\circ$ ,  $T_e = 10^\circ$ , au bout d'une minute,  $T = 19,5^\circ$ . Calculer le temps  $\tau$  au bout duquel elle sera de  $15^\circ$ .

Rép : 2)  $T = (T_0 - T_e) \cdot \exp(-\frac{a \cdot t}{C}) + T_e$ ; 3)  $\tau = 13,5 \text{ min}$

■ Mécanique et thermodynamique

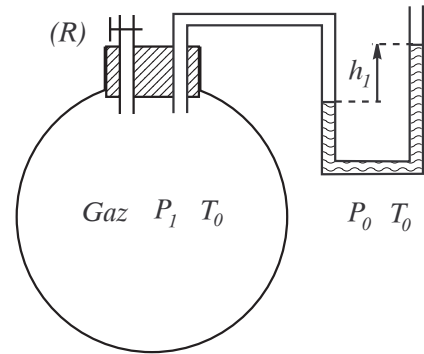
**Ex-T3.15** Expérience de Clément-Desormes : détermination expérimentale de  $\gamma$  (\*)

On considère un ballon rempli d'un gaz parfait à une pression légèrement supérieure à la pression atmosphérique  $P_0$  : le liquide manométrique dans le tube en U présente une dénivellation  $h_1$ .

On ouvre le robinet pendant une durée brève, la dénivellation du liquide devenant nulle.

Le robinet fermé, on attend que s'établisse l'équilibre thermique : celui-ci correspond à une dénivellation  $h_2$  du liquide.

→ Montrer que :  $\gamma = \frac{h_1}{h_1 - h_2}$



**Conseil :** raisonner sur les  $n$  moles restant dans le ballon après la fuite. Lors de la fuite, ces  $n$  moles subissent une détente rapide qui pourra être considérée comme adiabatique. De plus comme  $P_1 \cong P_0$ , on pourra la considérer pratiquement quasi-statique et mécaniquement réversible.

**Ex-T3.16** Méthode de Rückhardt

Soit un gaz parfait occupant un volume  $V_0$  (de l'ordre de 10 L) d'un récipient surmonté d'un tube de verre (d'une longueur de 50 cm environ) et de section faible  $S$ .

Considérons une bille d'acier, de masse  $m$ , susceptible de glisser le long du tube de verre.

Cette bille se trouve en équilibre mécanique en un point  $O$ .

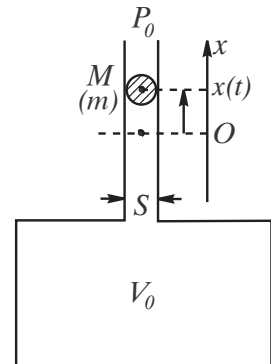
1) Quelle est la pression  $P'_0$  du gaz à l'intérieur du récipient (en notant  $P_0$  la pression atmosphérique et  $g$  l'intensité du champ de pesanteur) ?

2) On écarte la bille de  $x_0$ , à partir de  $O$ , à l'instant  $t = 0$ , et on la lâche sans lui communiquer de vitesse initiale.  $x_0$  est suffisamment faible pour avoir  $x_0 S \ll V_0$ .

→ En négligeant les frottements ('fluides' comme 'solide'), établir l'équation du mouvement vérifiée par  $x(t)$ . On supposera que la transformation du gaz est adiabatique quasi-statique.

→ Indiquer la période  $T$  des oscillations et en déduire l'expression de  $\gamma$  en fonction des paramètres expérimentaux.

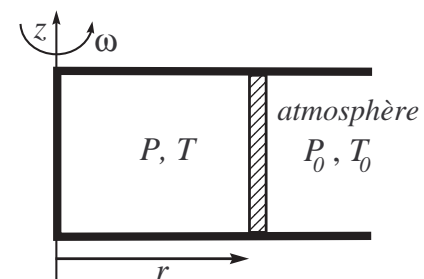
→ Exprimer  $x$  en fonction de  $t$ .



**Rép :** 1)  $P'_0 = P_0 + \frac{mg}{S}$ ; 2) Justifier que  $PV^\gamma = \text{Cte}$ , effectuer la différentielle logarithmique de cette relation et en déduire que  $dP \simeq -\frac{\gamma P'_0 S}{V_0} x(t)$ . L'application du PDF à la bille, après y avoir fait apparaître  $dP$ , conduit à  $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$  avec  $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{mV_0}{\gamma P'_0 S^2}}$

**Ex-T3.17** Piston en rotation autour d'un axe

Un cylindre calorifugé est mis en rotation de manière progressive à partir de la vitesse nulle jusqu'à la vitesse angulaire  $\omega$  (qui restera constante) autour d'un axe vertical. Un piston mobile de masse  $m$  et de section  $S$  glisse sans frottement à l'intérieur du cylindre; il emprisonne une quantité d'air initialement caractérisée par les conditions  $\{P_0, T_0, V_0\}$ . L'air sera considéré comme un gaz parfait.



1) Déterminer la pression finale  $P_f$  du gaz si l'on admet qu'il a subi une transformation quasi-statique réversible lorsque le piston s'est déplacé de sa position initiale caractérisée par  $r_0$  jusqu'à sa position d'équilibre caractérisée par  $r_f$ .

2) En déduire la vitesse angulaire  $\omega$  et la température finale  $T_f$  du gaz.

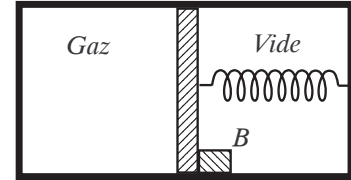
**3) Données :**  $P_0 = 1013 \text{ hPa}$ ;  $S = 10 \text{ cm}^2$ ;  $r_0 = 10 \text{ cm}$ ;  $r_f = 12 \text{ cm}$ ;  $m = 1 \text{ kg}$ ;  $T_0 = 293 \text{ K}$  et  $\gamma = 1,4$ .  $\rightarrow$  Calculer numériquement  $P_f$ ,  $T_f$  et  $\omega$ .

**Rép :** **1)**  $P_f = P_0(\frac{r_0}{r_f})^\gamma$ ; **2)**  $T_f = T_0(\frac{r_0}{r_f})^{\gamma-1}$ ; **3)**  $P_f = 0,785 \text{ bar}$ ;  $T_f = 272 \text{ K}$  et  $\omega = 13,8 \text{ rad.s}^{-1}$ .

**Ex-T3.18) cas d'une Force extérieure conservative (\*)**

On considère un piston calorifugé mobile dans un cylindre calorifugé horizontal de section constante  $S = 500 \text{ cm}^2$ .

Le compartiment de gauche contient  $n = 0,01 \text{ mole}$  d'un GP de coefficient  $\gamma = 1,40 = \frac{7}{5}$  et le compartiment de droite est soumis à un vide poussé. Le piston est relié par un ressort de raideur  $k = 10^{11} \text{ N.m}^{-1}$ .



**1)** Initialement, le piston est coincé par une butée  $B$ , le ressort n'est pas tendu, la pression du gaz vaut  $P_0 = 0,241 \text{ bar}$  et sa température  $T_0 = 290 \text{ K}$ . Calculer le volume  $V_0$  occupé initialement par le gaz.

**2)** On supprime la butée  $B$ . Le système évolue vers un nouvel état d'équilibre. On cherche à déterminer l'allongement final du ressort,  $x_F$ , le volume final du gaz,  $V_F$ , sa pression finale,  $P_F$ , sa température finale,  $T_F$ , et le travail  $W$  qu'il a reçu.

**2.a)** En appliquant le PFD au piston au repos dans l'état final, donner la relation entre  $P_F$ ,  $S$ ,  $k$  et  $x_F$ .

**2.b)** Quelle est l'expression de l'équation d'état du GP dans l'état final ?

**2.c)** Appliquer le Premier Principe au GP (en fait {GP+piston}) et en déduire une relation entre  $T_F$ ,  $T_0$ ,  $n$ ,  $\gamma$ ,  $k$  et  $x_F$ .

**2.d)** Quelle est la relation liant le volume final  $V_F$  avec  $V_0$ ,  $x_F$  et  $S$  ?

**2.e)** Déduire des quatre équations précédentes que la pression  $P_F$  est solution de l'équation :

$$P_F^2 + \frac{5}{6} \frac{kV_0}{S^2} P_F - \frac{5}{6} nRT_0 \frac{k}{S^2} = 0$$

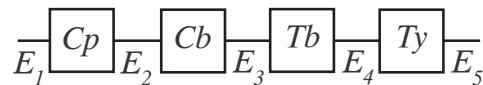
**2.f)** En déduire les valeurs des grandeurs recherchées.

**Rép :** **1)**  $V_0 = 1 \text{ L}$ ; **2)**  $P_F \simeq 7450 \text{ pa}$ ;  $V_F = 2,86 \text{ L}$ ;  $T_F = 256 \text{ K}$ ;  $x_F = 3,72 \text{ cm}$ ;  $W_{\text{forces pressantes}} = 0 \text{ J}$ ;  $W_{\text{ressort}} = -\Delta\mathcal{E}_{p,\text{él}} \simeq -7 \text{ J}$

**■ Systèmes ouverts**

**Ex-T3.19) Turboréacteur (\*\*)**

Un turboréacteur destiné à la propulsion d'avions est schématisé ci-contre :



- l'air est comprimé dans le compresseur ( $Cp$ ) calorifugé où il évolue de l'état  $E_1$  à l'état  $E_2$ ;

- puis l'air traverse une chambre de combustion ( $Cb$ ) où il subit un réchauffement isobare de l'état  $E_2$  à l'état  $E_3$ ;

- l'air se détend ensuite dans une turbine ( $Tb$ ) calorifugée où il évolue de l'état  $E_3$  à l'état  $E_4$ ;

- enfin l'air traverse une tuyère ( $Ty$ ), conduite de section variable où il acquiert une vitesse importante  $c_5$  et évolue de l'état  $E_4$  à l'état  $E_5$ .

État	$E_1$	$E_2$	$E_3$	$E_4$	$E_5$
$P$ en bars	1,0	5,0	5,0	2,5	1,0
$T$ en K	288	$T_2 = ?$	1 123	955	735

Les données concernant les différents états sont résumés dans le tableau ci-contre.

L'installation fonctionne en régime stationnaire. On néglige les variations d'énergie potentielle de pesanteur dans toute l'installation. On néglige l'énergie cinétique de l'air partout sauf dans l'état  $E_5$  à la sortie de la tuyère, où la vitesse de l'air vaut  $c_5$ .

L'air est assimilé à un gaz parfait de capacité thermique massique à pression constante  $c_P = 1,0 \text{ kJ.kg}^{-1}.K^{-1}$  et de masse molaire  $M = 29 \text{ g.mol}^{-1}$ . On rappelle que  $R = 8,314 \text{ J.K}^{-1}.mol^{-1}$ .

**1)** Soit  $(\Sigma)$  le système ouvert constitué par le gaz contenu dans la tuyère ( $Ty$ ) et  $(\Sigma^*)$  le système fermé associé constitué à l'instant  $t$  par  $(\Sigma)$  et par la masse  $dm$  d'air qui va entrer dans la tuyère



entre les instants  $t$  et  $t + dt$ , et constitué à l'instant  $t + dt$  par  $(\Sigma)$  et par la masse  $dm$  d'air qui est sortie de la tuyère entre les instants  $t$  et  $t + dt$ .

En appliquant le premier principe à  $(\Sigma^*)$ , calculer la vitesse  $c_5$  de l'air à la sortie de la tuyère.

**2)** En raisonnant de manière analogue, exprimer les travaux  $w_{Cp}$  et  $w_{Tu}$  correspondant au transfert d'un kilogramme d'air respectivement dans le compresseur et dans la turbine en fonction des températures  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  et  $T_4$ . Sachant que le travail récupéré dans la turbine sert exactement à entraîner le compresseur, calculer  $T_2$ .

**3)** En raisonnant comme à la question 1), calculer le transfert thermique  $q$  correspondant au transit d'un kilogramme d'air dans la chambre de combustion. En déduire le rendement thermodynamique du turboréacteur défini par :  $r = \frac{1}{2} \frac{c_5^2}{q}$

**Rép :** **1)**  $c_5 = \sqrt{2c_P(T_4 - T_5)} = 6,6 \cdot 10^2 \text{ m.s}^{-1}$ ; **2)**  $w_{Cp} = c_P(T_2 - T_1)$ ;  $w_{Tu} = c_P(T_4 - T_3)$ ;  $T_2 = 456 \text{ K}$ ; **3)**  $q = c_P(T_3 - T_2) = 667 \text{ kJ.kg}^{-1}$ ;  $r = 33\%$ .

### Ex-T3.20 Géométrie d'une Tuyère (\*\*)

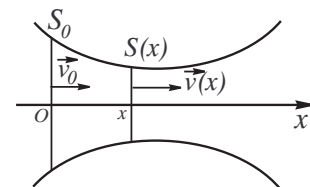
Soit une tuyère avec un écoulement permanent adiabatique d'un gaz parfait :

**1)** Montrer que :  $v^2(x) - v_0^2 = \frac{2\gamma}{\gamma - 1} \frac{R}{M} (T_0 - T(x))$  ①

**2)** Montrer que :  $\frac{dT}{dx} = -\frac{(\gamma - 1)T}{Sv} \frac{d(Sv)}{dx}$  ②

**3)** Déduire des questions précédentes que :

$$\left(\frac{v^2}{c^2} - 1\right) \frac{1}{v} \frac{dv}{dx} = \frac{1}{S} \frac{dS}{dx} \quad \text{avec } c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \text{ (vitesse du son).}$$



**Rq :** pour un écoulement subsonique ( $v < c$ ), il faut que la tuyère soit convergente si on veut que la vitesse augmente avec  $x$ .

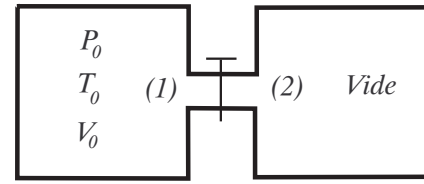
**Indications :** **1)** Se ramener à un système fermé pour établir le 1P Industriel ( $\rightarrow$  Cf **Ex-T3.19**);

**2)** Bien que la vitesse d'écoulement soit élevée en sortie (c'est le rôle d'une tuyère), on peut faire l'hypothèse que l'écoulement adiabatique se ramène à la transformation adiabatique  $QS^*$  d'une masse  $dm$  entre l'état  $\{V_0, T_0\}$  et l'état  $\{V(x), T(x)\}$ . Le gaz étant supposé parfait, on peut alors appliquer la loi de Laplace  $TV^{\gamma-1} = \text{Cte}$ , avec  $V(x) = Sv(x)dt$  pour la masse  $dm$  de gaz sortant de la tuyère entre  $t$  et  $t + dt$ ; **3)** Dériver ① par rapport à  $x$  et  $y$  « injecter » ②.

## T4

## ■ Déteintes

**Ex-T4.1** Les deux réservoirs ont le même volume  $V_0$  et l'ensemble est adiabatique. On entrouvre le robinet : le gaz parfait restant dans le compartiment (1) a subi une détente quasi-statique.



Déterminer l'état final et décrire le chemin suivi pendant la transformation, dans les deux cas suivants :

- (a) les deux réservoirs sont thermiquement isolés l'un de l'autre (ce qui revient à négliger le transfert thermique entre les gaz se trouvant dans (1) et (2) à l'état final) ;  
 (b) Les deux réservoirs sont en contact thermique.

**Rép :** (a)  $n_1 = n_2^{-\frac{1}{\gamma}}$  ;  $T_2 = \frac{T_0}{2(1 - 2^{-\frac{1}{\gamma}})}$

**Ex-T4.2** Détente d'un gaz réel donné par  $S(U, V)$

Dans le domaine de températures et de pressions considéré, une mole de gaz monoatomique de sphères dures est décrit par la fonction caractéristique :

$$S_m(U_m, V_m) = \frac{S}{n} = S_{m0} + \frac{3}{2} R \ln \left( \frac{U_m}{U_{m0}} \right) + R \ln \left( \frac{V_m - b}{V_{m0} - b} \right)$$

où  $S_{m0}$ ,  $U_{m0}$  et  $V_{m0}$  désignent respectivement l'entropie, l'énergie interne et le volume molaires dans un état de référence, et où  $b = 2.10^{-5} \text{ m}^3.\text{mol}^{-1}$  et  $R = 8,314 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$ .

1) Une mole de ce gaz est initialement en équilibre dans un cylindre parfaitement calorifugé de volume  $V_{Im}$ , à la température  $T_I = 300 \text{ K}$ . On réalise une détente réversible faisant passer le volume du cylindre de  $V_{Im} = 10b$  à  $V_{Fm} = 20b$ .

→ Déterminer la pression initiale, la température finale et le travail  $W_m$  reçu par le gaz.

2) On réalise une détente de Joule-Gay Lussac d'une mole de ce gaz : initialement le gaz occupe un volume  $V_{Im} = 10b$  et sa température vaut  $T_I = 300 \text{ K}$ . Dans l'état d'équilibre final, le gaz occupe un volume  $V_{Fm} = 20b$ .

→ Déterminer la température finale, la pression finale et l'entropie molaire créée. Commenter.

**Rép :** 1)  $P_I = 138,6 \text{ bars}$  ;  $T_F = T_I \left( \frac{V_{mF} - b}{V_{mI} - b} \right)^{\frac{3}{2}} = 182 \text{ K}$  ;  $W_m = -1,47 \text{ kJ.mol}^{-1}$  ;

2)  ${}^c S_m = R \ln \frac{V_{mF} - b}{V_{mI} - b} = 6,21 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$ .

**Ex-T4.3** Détente de Joule-Gay Lussac de la vapeur d'eau

On réalise une détente de Joule-Gay Lussac dans un récipient calorifugé constitué de deux compartiments de volumes respectifs  $V_1$  et  $V_2 - V_1$  reliés par un robinet (R).

Initialement, une mole de vapeur d'eau est contenue dans le récipient de gauche dans l'état  $E_1 \{P_1 = 100 \text{ bars}, T_1 = 773 \text{ K}, V_1 = 5,90.10^{-4} \text{ m}^3, U_1 = 54,78 \text{ kJ}, S_1 = 6,594 \text{ kJ.K}^{-1}\}$  et le compartiment de droite est vide.

On ouvre le robinet (R), la vapeur d'eau occupe le volume total  $V_2$  ; on mesure alors  $T_2 = 753 \text{ K}$ .

1) La vapeur d'eau est-elle assimilable à un GP au cours de la détente ?

Déterminer les caractéristiques  $\{P_2, T_2, V_2, U_2, S_2\}$  de l'état final en utilisant l'extrait des tables de la vapeur d'eau (grandeurs molaires) à la température  $T_2 = 753 \text{ K}$  :

$P$ en bars	40	46	52	58	64	70
$V_m$ en $\text{m}^3.\text{mol}^{-1}$	$1,51.10^{-3}$	$1,31.10^{-3}$	$1,15.10^{-3}$	$1,02.10^{-3}$	$9,23.10^{-4}$	$8,39.10^{-4}$
$U_m$ en $\text{kJ.mol}^{-1}$	55,14	55,04	54,96	54,80	54,70	54,59
$S_m$ en $\text{kJ.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$	6,963	6,890	6,825	6,766	6,712	6,662

2) Calculer l'entropie créée au cours de l'évolution et commenter.

**Rép :** 1)  $P_2 \simeq 59,2 \text{ bars}$  ;  $V_2 \simeq 1,001.10^{-3} \text{ m}^3$  ;  $S_2 \simeq 6,755 \text{ kJ.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$  ;

2)  $\Delta S = {}^c S \simeq 161 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$ .



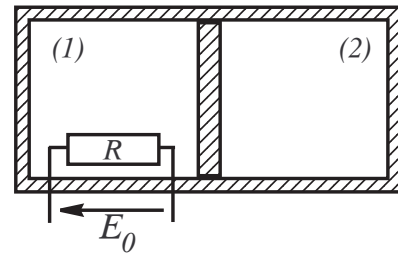
## T4

## ■ Bilans entropiques

## Ex-T4.4

Les deux compartiments contiennent le même gaz parfait initialement dans le même état  $\{P_0, T_0, V_0\}$ . Les parois sont calorifugées ainsi que le piston. Ce dernier se déplace sans frottement dans le cylindre.

On fait passer un courant  $I$  dans la résistance  $R$  de telle sorte que la transformation du gaz puisse être considérée comme quasi-statique, et jusqu'à ce que la pression devienne  $P_f$ .



- 1) Déterminer l'état thermodynamique du gaz dans chaque compartiment.
- 2) Donner l'expression de l'énergie fournie par le générateur qui alimente la résistance.
- 3) Calculer la variation d'entropie du système complet (résistance incluse).

Rép : 1)  $V_2 = V_0 \left(\frac{P_0}{P_f}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$  ;  $T_2 = T_0 \left(\frac{P_f}{P_0}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}}$  ;  $T_1 = T_0 \left(2\frac{P_f}{P_0} - \left(\frac{P_f}{P_0}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}}\right)$  ;

2)  $W_{\text{élec}} = nC_{V_m}(T_1 + T_2 - 2T_0)$  ; 3)  $\Delta S = nC_{V_m} \ln \frac{T_1}{T_0} + nR \ln \frac{V_1}{V_0}$ .

## Ex-T4.5 Entropie de mélange

Considérons un cylindre parfaitement isolé, séparé en deux compartiments de volume  $V_0$ , par une paroi escamotable.

Initialement, chaque compartiment contient un GP à la même température  $T_0$ . Supposons que l'un renferme de l'hélium ( $n_1$  moles,  $C_{V_{m1}} = \frac{3}{2}R$ ) et l'autre du dihydrogène ( $n_2$  moles,  $C_{V_{m2}} = \frac{5}{2}R$ ).

Supprimons la paroi escamotable ; on atteint un nouvel état d'équilibre caractérisé par :  $V_F = 2V_0$ ,  $P_F$  et  $T_F$ , les deux gaz, par diffusion, constituant un GP unique.

- 1) Calculer  $P_F$  et  $T_F$ .
- 2) Effectuer un bilan entropique pour cette transformation.

Rép : 1)  $T_F = T_0$  ;  $P_F = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)$  ; 2)  $\Delta S = (n_1 + n_2)R \ln 2$ .

## Ex-T4.6 Système Glace/Eau liquide dans un calorimètre

Dans un vase parfaitement calorifugé de capacité thermique  $C = 120 J.K^{-1}$ , on verse  $m_1 = 200 g$  d'eau de capacité thermique massique  $c_e = 4185 J.K^{-1}.kg^{-1}$ . la température d'équilibre s'établit à  $t_1 = 18^\circ C$ .

On y introduit alors un cube de glace de masse  $m_2 = 72 g$  pris initialement à la température  $t_2 = -10^\circ C$  et on agite jusqu'à obtention d'un nouvel équilibre thermique.

La capacité thermique massique de la glace est  $c_g = 2090 J.K^{-1}.kg^{-1}$  ; et la chaleur latente de fusion est , à  $0^\circ C$  et sous la pression atmosphérique normale :  $L_f = 333 kJ.kg^{-1}$ .

- 1) Déterminer, lorsque l'équilibre est atteint, la température finale  $T_0$  et faire un bilan *glace/eau*.
- 2) Calculer (littéralement et numériquement) la variation d'entropie, pour le système { eau liquide + glace + calorimètre }, consécutive à l'introduction de la glace.

Rép : 2)  $\Delta S = (C + m_1 c_e) \ln \frac{T_0}{T_1} + m_2 c_g \ln \frac{T_0}{T_2} + \frac{x L_f}{T_0}$ .

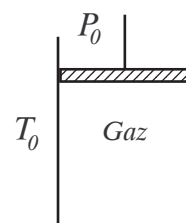
## Ex-T4.7 Deux transformations monothermes

Un gaz parfait se trouve dans un cylindre à l'intérieur duquel peut coulisser (sans frottement) un piston de masse négligeable.

On note  $P_0$  et  $T_0$  la pression et la température de l'atmosphère extérieure.

Initialement, le gaz, à la température  $T_1 = T_0$ , occupe un volume  $V_1$ .

**Données :**  $P_0 = 1 \text{ bar}$  ;  $V_1 = 5.10^{-3} m^3$  ;  $R = 8,32 J.K^{-1}.mol^{-1}$  ;  $T_0 = 293 K$  et  $\gamma = \frac{C_P}{C_V} = 1,4$  (supposé indépendant de la température,  $C_P$  et  $C_V$  étant les capacités thermiques isobare et isochore).



**1)** La paroi du cylindre est conductrice de la chaleur (paroi *diathermane*).

En appuyant sur le piston, un opérateur augmente très lentement la pression jusqu'à  $P_2 = 10 \text{ bars}$ . Dans l'état d'équilibre final, le gaz occupe un volume  $V_2$  à la température  $T_2$ .

**1.a)** Calculer  $V_2$  et  $T_2$ .

**1.b)** Exprimer littéralement puis calculer numériquement : la variation d'énergie interne  $\Delta U$ , la variation d'enthalpie  $\Delta H$ , le transfert thermique chaleur  $Q$  et le travail  $W$  échangés par le système gazeux avec le milieu extérieur.

**1.c)** Quelle est la variation d'entropie  $\Delta S_g$  du gaz au cours de l'opération ?

**1.d)** On pose  $F \equiv U - TS$  et  $G \equiv H - TS$ .

Donner la relation entre la variation d'enthalpie libre  $\Delta G$  et la variation d'énergie libre  $\Delta F$  du gaz parfait.

**2)** La paroi du cylindre est toujours diathermane, mais l'opérateur, à l'équilibre initial ( $P_1, V_1, T_1$ ), place sur le piston (de section  $s$ ) une masse  $M = \frac{(P_2 - P_1)s}{g}$  (où  $g$  est l'intensité du champ de pesanteur).

**2.a)** Reprendre les calculs de la question 1.a), sachant que  $P_2 = 10 \text{ bars}$ .

**2.b)** On note  $\Delta S_a$  la variation d'entropie de l'atmosphère extérieure au cours de l'opération. → Calculer  $\Delta S_a$ .

Que représente  $\Delta S_g + \Delta S_a$  ? Commenter le signe de cette expression.

**Rép :** **1.a)**  $V_2 = 5.10^{-4} \text{ m}^3$ ; **1.b)**  $Q = -1151 \text{ J}$ ; **1.c)**  $\Delta S = -3,93 \text{ J.K}^{-1}$ ; **2.b)**  $\Delta S_a = 15,36 \text{ J.K}^{-1}$ .

#### Ex-T4.8 Compression irréversible monotherme

Un cylindre vertical de section  $S$  est fermé par un piston horizontal de masse négligeable, mobile sans frottement. Une masse  $m$  d'air (considéré comme un gaz parfait de masse molaire  $M$ ) est enfermée dans le cylindre, à la température initiale  $T_1$  et la pression initiale  $P_1 = P_a$  ( $P_a$  note la pression ambiante supposée constante).

$R$  est la constante des gaz parfaits et  $\gamma$  note le rapport des capacités thermiques à pression et à volume constant.

**Données :**  $S = 100 \text{ cm}^2$ ;  $m = 7,25 \text{ g}$ ;  $M = 29 \text{ g.mol}^{-1}$ ;  $R = 8,314 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$ ;  $T_1 = 300 \text{ K}$ ;  $P_a = 1 \text{ bar}$ ;  $\gamma = 1,4$ .

**1)** Calculer  $V_1$ , le volume initial de l'air, et la hauteur  $h_1$  (distance entre le piston et le fond du cylindre).

**2)** Exprimer la variation élémentaire d'entropie d'une masse  $m$  de gaz parfait, au cours d'une transformation quasi-statique, en fonction de  $m, R, M, \gamma, \frac{dT}{T}$  et  $\frac{dV}{V}$ .

**3)** Les parois du cylindre ainsi que le piston sont *diathermanes*, ce qui signifie qu'ils autorisent les transferts thermiques (ont dit aussi qu'il sont « perméables à la chaleur »).

L'ensemble du dispositif se trouve dans une atmosphère maintenue à la température  $T_a = T_1 = 300 \text{ K}$ .

On applique *brutalement* la force  $F = 1000 \text{ N}$  sur le piston.

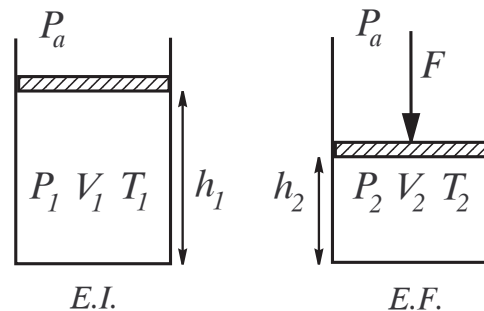
On appelle  $P_2$  et  $V_2$  la pression et le volume de l'air lorsque celui-ci atteint l'équilibre thermique avec le milieu extérieur.

**3.a)** Calculer le taux de compression  $\tau = \frac{P_2}{P_1}$  et la hauteur  $h_2$  finale.

**3.b)** Calculer le travail  $W$  reçu par l'air au cours de l'évolution 1 → 2.

**3.c)** Calculer la variation d'entropie  $\Delta S_{\text{air}}$  de l'air pour cette évolution. Le signe de cette variation est-il 'choquant' ?

**3.d)** Calculer, pour cette même évolution, la variation d'entropie  $\Delta S_{\text{ext}}$  du milieu extérieur.



En déduire la variation d'entropie de l'«univers» ( $\{\text{air} + \text{extérieur}\}$ ) :  $\Delta S_\infty = \Delta S_{\text{air}} + \Delta S_{\text{ext}}$ . Justifier son signe.

**Rép :** 1)  $h_1 = 62,4 \text{ cm}$ ; 2)  $dS = \frac{mR}{M} \left( \frac{1}{\gamma-1} \frac{dT}{T} + \frac{dV}{V} \right)$ ; 3.a)  $h_2 = 31,2 \text{ cm}$ ; 3.b)  $W_{12} = 624 \text{ J}$ ; 3.c)  $\Delta S_{\text{air}} = -1,44 \text{ J.K}^{-1}$ ; 3.d)  $\Delta S_\infty = {}^P S_\infty = 0,64 \text{ J.K}^{-1}$ .

### Ex-T4.9 Évolution adiabatique irréversible de vapeur d'eau (\*)

Dans une machine à vapeur, au cours de la phase motrice, une mole de vapeur d'eau se détend dans un cylindre calorifugé et fermé de l'état  $A$   $\{P_A = 40 \text{ bars}, T_A = 773 \text{ K}\}$  jusqu'à l'état  $B$   $\{P_B = 1 \text{ bar}, T_B = 373 \text{ K}\}$ .

On extrait des tables thermodynamiques les valeurs suivantes pour le volume molaire  $V_m$ , l'énergie interne molaire  $U_m$  et l'entropie molaire  $S_m$  :

	$V_m$ en $\text{m}^3.\text{mol}^{-1}$	$U_m$ en $\text{kJ.mol}^{-1}$	$S_m$ en $\text{kJ.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$
A	$1,556.10^{-3}$	55,77	0,1275
B	$3,060.10^{-2}$	45,08	0,1325

1) Calculer le travail  $W$  reçu par la vapeur d'eau au cours de l'évolution  $A \rightarrow B$ . L'évolution est-elle réversible ?

On modélise l'évolution  $A \rightarrow B$  (supposée **QS\***) par une évolution polytropique d'indice  $k$  ( $PV^k = \text{cste}$ ).

→ Déterminer  $k$  et en déduire une estimation  $W'$  du travail  $W$ . Commenter.

2) On réalise une détente réversible entre les mêmes états  $A$  et  $B$ , représentés par une évolution rectiligne dans le diagramme entropique  $(T, S)$ .

Déterminer le transfert thermique  $Q^*$  et le travail  $W^*$  au cours de cette détente. Comparer  $W^*$  et l'estimation polytropique  $W'$  obtenue en 1). Commenter.

**Rép :** 1)  $W_m = -10,69 \text{ kJ.mol}^{-1}$ ;  $k = 1,24$ ;  $W'_m = -13,27 \text{ kJ.mol}^{-1}$ ; 2)  $Q_m^* = 2,87 \text{ kJ.mol}^{-1}$ ;  $W_m^* = -13,56 \text{ kJ.mol}^{-1}$ .

### Ex-T4.10 Échangeur thermique

Dans cet exercice, on utilisera les grandeurs massiques :  $v, h, w, q$ , etc. . .

On considère l'échangeur thermique ( $ETH$ ) représenté ci-contre. Il est constitué de deux circulations parallèles d'air : dans l'une l'air évolue de l'état  $E_1$  à l'état  $E_2$  et dans l'autre l'air évolue de l'état  $E_3$  à l'état  $E_4$ .

Ces états sont caractérisés par la même pression  $P = 1 \text{ bar}$  et des températures respectives  $T_1, T_2, T_3$  et  $T_4$  avec  $T_3 \neq T_1$ .

L'air est assimilé à un GP de coefficient  $\gamma = 1,40$ .

On donne :  $r \equiv \frac{R}{M} = 287 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$ .

Alors l'équation d'état s'écrit :  $Pv = rT$ .

L'échangeur thermique constitue un système ouvert ( $\Sigma$ ) à deux entrées et sorties ; l'installation fonctionne en régime stationnaire avec un débit massique identique dans les deux circulations.

On néglige les variations d'énergie mécanique.

On suppose que l'échangeur thermique est parfaitement calorifugé et que son fonctionnement est réversible.

On associe au système ouvert ( $\Sigma$ ) le système fermé ( $\Sigma^*$ ) tel que :

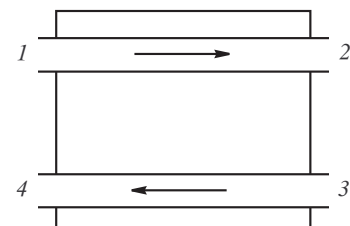
- à l'instant  $t$ , ( $\Sigma^*$ ) est constitué de ( $\Sigma$ ) et des masses  $dm_1$  et  $dm_3$  qui vont entrer dans ( $\Sigma$ ) par chacune des entrées pendant la durée  $dt$  ;

- à l'instant  $t + dt$ , ( $\Sigma^*$ ) est constitué de ( $\Sigma$ ) et des masses  $dm_2$  et  $dm_4$  qui sont sorties de ( $\Sigma$ ) pendant la durée  $dt$ .

1) En appliquant le premier et le deuxième principe de la thermodynamique au système ( $\Sigma^*$ ), établir deux relations entre les températures  $T_1, T_2, T_3$  et  $T_4$ .

2) En supposant les températures  $T_1$  et  $T_3$  connues, déterminer les températures  $T_2$  et  $T_4$ . Commenter.

3) Dans un échangeur thermique réel, on a  $T_1 = 350 \text{ K}$ ,  $T_2 = 290 \text{ K}$ ,  $T_3 = 280 \text{ K}$  et  $T_4 = 340 \text{ K}$ .



Calculer l'entropie massique créée lors du transfert dans chacune des circulations et commenter.

**4)** En réalité l'échangeur thermique n'est pas parfaitement calorifugé, de telle sorte qu'il cède de la chaleur à l'atmosphère, considérée comme un thermostat dont la température est  $T_0 = 293 \text{ K}$ . On a alors  $T_1 = 350 \text{ K}$ ,  $T_2 = 290 \text{ K}$ ,  $T_3 = 280 \text{ K}$  et  $T_4 = 330 \text{ K}$ .

En appliquant le premier principe de la thermodynamique au système ( $\Sigma^*$ ), calculer le transfert thermique massique dans chacune des circulations et commenter. Calculer l'entropie massique créée correspondante et commenter.

**Rép :** **1)**  $T_2 - T_1 = T_3 - T_4$  et  $T_1 T_3 = T_2 T_4$ ; **2)**  $T_3 = T_2$  et  $T_4 = T_1$ ; **3)**  $\Delta s = {}^c s = \frac{\gamma r}{\gamma - 1} \ln \frac{T_2 T_4}{T_1 T_3} = 6,13 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$ ; **4)**  $q = \frac{\gamma r}{\gamma - 1} (T_2 + T_4 - T_1 - T_3) = -10,0 \text{ kJ.kg}^{-1}$ .

## DL — Étude de différentes transformations subies par un gaz parfait dans un cylindre à deux pistons

Ce problème est la première partie d'un problème de thermodynamique posé très récemment au concours CCP (2008, Épreuve 1) : il ne nécessite pour autant que la connaissance du premier et du deuxième principe ( $\rightarrow$  Cf Cours **T3/T4**) appliqués à un gaz parfaits.

Dans de tels problèmes, il faut prendre le temps de bien lire l'énoncé pour relever tous les « indices » susceptibles de nous aider à établir les natures des transformations ou les états d'équilibres thermodynamiques des systèmes considérés.

On considère un dispositif expérimental constitué d'un cylindre vertical ouvert dans l'atmosphère, aux parois indéformables, de section  $S$ , dans lequel deux pistons de masse et d'épaisseur négligeables peuvent se déplacer librement.

Ces deux pistons, notés  $\pi_0$  et  $\pi_1$  définissent deux compartiments étanches dans le cylindre. Le piston  $\pi_0$  est le piston inférieur (cf. figure).

On utilisera le symbole 0 pour repérer les grandeurs relatives au compartiment inférieur et le symbole 1 pour repérer les grandeurs relatives au compartiment supérieur. On appellera « longueur » du compartiment 0 la distance qui sépare le fond du cylindre du piston  $\pi_0$ , et « longueur » du compartiment 1 la distance qui sépare les deux pistons.

Quelle que soit la nature des fluides contenus dans les compartiments, on supposera qu'à l'équilibre la pression est uniforme dans les compartiments.

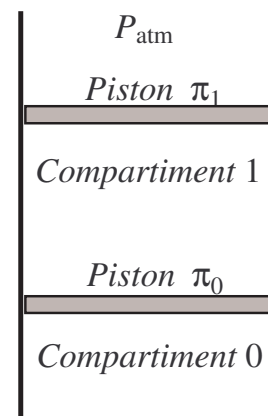
On supposera dans toute la suite que les frottements lors du déplacement des pistons sont totalement négligeables du point de vue énergétique.

Un système mécanique permet de bloquer ou de débloquer le mouvement de chacun des pistons sans modifier la géométrie du système.

Le compartiment inférieur contient du dioxygène assimilé à un gaz parfait. Le compartiment supérieur contient du diazote également assimilé à un gaz parfait. Les parois du cylindre et le piston  $\pi_1$  sont perméables à la chaleur. Le piston  $\pi_0$  est calorifugé.

### Données :

- section du cylindre :  $S = 10^{-2} \text{ m}^2$
- accélération de la pesanteur :  $g_0 = 10 \text{ m.s}^{-2}$
- la pression atmosphérique est constante et égale à  $P_{\text{atm}} = 10^5 \text{ Pa}$
- rapport des capacités thermiques du dioxygène et du diazote :  $\gamma = 1,4$
- constante massique du dioxygène :  $r_0 = 260 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$



- constante massique du diazote :  $r_1 = 297 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$

**Rq :** On appelle constante massique dun gaz parfait le rapport de la constante  $R$  des gaz parfait sur la masse molaire du gaz.

**1)** On bloque le piston  $\pi_0$ . Le piston  $\pi_1$  peut se déplacer librement. Le dispositif expérimental est alors dans l'état d'équilibre noté  $A$ .

Le dioxygène contenu dans le compartiment 0 est caractérisé par une pression  $P_A^0 = 10^5 \text{ Pa}$  et une température  $T_A^0 = 300 \text{ K}$ . La longueur du compartiment 0 est alors  $d_A^0 = 0,2 \text{ m}$ .

Le diazote contenu dans le compartiment 1 est caractérisé par une pression  $P_A^1 = 10^5 \text{ Pa}$  et une température  $T_A^1 = 300 \text{ K}$ . La longueur du compartiment 1 est alors  $d_A^1 = 0,15 \text{ m}$ .

On place le cylindre au contact d'une source (thermostat) à la température  $T_S = 600 \text{ K}$ . Chacun des sous-systèmes, constitué par chacun des gaz (repéré comme les compartiments par 0 et 1), atteint un nouvel état d'équilibre ( $B$ ).

On note  $T_B^0$ ,  $P_B^0$  et  $d_B^0$  respectivement la température du dioxygène (gaz 0), la pression du dioxygène et la hauteur du compartiment 0 dans cet état d'équilibre.

De la même façon  $T_B^1$ ,  $P_B^1$  et  $d_B^1$  représentent la température du diazote (gaz 1), la pression du diazote et la hauteur du compartiment 1 dans son nouvel état d'équilibre.

**1.a)** Calculer la masse  $m_0$  de dioxygène contenue dans le compartiment 0 et la masse  $m_1$  de diazote contenue dans le compartiment 1.

**1.b)** Caractériser la transformation subie par le dioxygène. En déduire  $T_B^0, d_B^0$  et  $P_B^0$ .

**1.c)** Caractériser la transformation subie par le diazote. En déduire  $T_B^1, d_B^1$  et  $P_B^1$ .

**1.d)** Calculer la quantité d'énergie reçue par transfert mécanique (travail) par le dioxygène ( $W_{A \rightarrow B}^0$ ), et par le diazote ( $W_{A \rightarrow B}^1$ ) au cours de la transformation.

**1.e)** Calculer la quantité d'énergie reçue par transfert thermique (chaleur) par le dioxygène ( $Q_{A \rightarrow B}^0$ ), et par le diazote ( $Q_{A \rightarrow B}^1$ ) au cours de la transformation.

**1.f)** Calculer la variation d'entropie  $\Delta S_{A \rightarrow B}^0$  pour le dioxygène entre les deux états d'équilibre.

**1.g)** Calculer la variation d'entropie  $\Delta S_{A \rightarrow B}^1$  pour le diazote entre les deux états d'équilibre.

**1.h)** Calculer l'entropie produite  ${}^P S_{A \rightarrow B}$  au cours de la transformation.

**2)** Les deux sous-systèmes étant chacun dans leur propre état d'équilibre (repéré par l'indice  $B$ ), on bloque le piston  $\pi_1$ , puis on débloque le piston  $\pi_0$  (qui est toujours calorifugé).

Le cylindre est toujours au contact de la source à la température  $T_S = 600 \text{ K}$ . Chacun des sous-systèmes atteint un nouvel état d'équilibre ( $C$ ).

On note  $T_C^0$ ,  $P_C^0$  et  $d_C^0$  respectivement la température du dioxygène, la pression du dioxygène et la hauteur du compartiment 0 dans son nouvel état d'équilibre.

De la même façon  $T_C^1$ ,  $P_C^1$  et  $d_C^1$  représente la température du diazote, la pression du diazote et la hauteur du compartiment 1 dans son nouvel état d'équilibre.

**2.a)** Que peut-on dire sur les températures  $T_C^0$  et  $T_C^1$  et sur les pressions  $P_C^0$  et  $P_C^1$  du dioxygène et du diazote dans l'état d'équilibre  $C$ ?

**2.b)** Déterminer les longueurs  $d_C^0$  et  $d_C^1$ . En déduire les pressions  $P_C^0$  et  $P_C^1$ .

**2.c)** Calculer les variations d'énergie interne  $\Delta U_{B \rightarrow C}$  et d'entropie  $\Delta S_{B \rightarrow C}$  pour le système (les deux gaz) entre les deux états d'équilibre.

**2.d)** En déduire l'entropie produite  ${}^P S_{B \rightarrow C}$  au cours de la transformation.

---

**Rép :** **1.a)**  $m_0 = 2,56 \text{ g}$ ;  $m_1 = 1,68 \text{ g}$ ; **1.b)**  $P_B^0 = 2 \text{ bar}$ ; **1.c)**  $d_B^1 = 30 \text{ cm}$ ; **1.d)**  $W_{A \rightarrow B}^1 = -150 \text{ J}$ ; **1.e)**  $Q_{A \rightarrow B}^0 = 500 \text{ J}$ ;  $Q_{A \rightarrow B}^1 = 525 \text{ J}$ ; **1.f)**  $\Delta S_{A \rightarrow B}^0 = 1,155 \text{ J.K}^{-1}$ ; **1.g)**  $\Delta S_{A \rightarrow B}^1 = 1,213 \text{ J.K}^{-1}$ ; **1.h)**  ${}^P S_{A \rightarrow B} = 0,660 \text{ J.K}^{-1}$ ; **2.a)**  $P_C^0 = P_C^1$ ; **2.b)**  $d_C^0 = 28,6 \text{ cm}$ ;  $d_C^1 = 21,4 \text{ cm}$ ;  $P_C^0 = P_C^1 = 1,4 \text{ bar}$ ; **2.c)**  $\Delta U_{B \rightarrow C} = 0$ ;  $\Delta S_{B \rightarrow C} = \Delta S_{B \rightarrow C}^0 + \Delta S_{B \rightarrow C}^1 = 0,0694 \text{ J.K}^{-1}$ ; **2.d)**  ${}^e S = 0$ ;  ${}^P S = \Delta S_{B \rightarrow C}$