

Exercices de Thermodynamique

« Ce fut la grande tâche et la grande gloire de la physique du XIX^e siècle d'avoir ainsi considérablement précisé et étendu en tous sens notre connaissance des phénomènes qui se jouent à notre échelle.

Non seulement elle a continué à développer la Mécanique, l'Acoustique, l'Optique, toutes ces grandes disciplines de la science classique, mais elle a aussi créé de toutes pièces des sciences nouvelles aux aspects innombrables : la Thermodynamique et la science de l'Électricité. »

Louis DE BROGLIE (1892-1987) – *Matière et Lumière, exposés généraux sur la physique contemporaine, 1* (1937)

■ Systèmes thermodynamiques

Ex-T1.1 Grandeurs intensives et extensives (► Sol. p. 5)

Soit une mole d'un gaz occupant un volume V_m sous la pression P et à la température T .

1) On suppose que ces grandeurs sont liées par l'équation : $\left(P + \frac{a}{V_m^2}\right)(V_m - b) = RT$, où a , b et R sont des constantes. Utiliser les propriétés d'intensivité ou d'extensivité des grandeurs pour établir l'équation correspondante relative à n moles.

2) Même question pour l'équation : $P(V_m - b) \exp\left(\frac{a}{RTV_m}\right) = RT$.

Ex-T1.2 Pour donner du sens au nombre d'Avogadro (► Sol. p. 5)

On considère du sable fin dont chaque grain occupe un volume $V_0 = 0,1 \text{ mm}^3$. Quel est le volume V occupé par $N = 6.10^{23}$ grains ? Si on étendait uniformément ce sable sur la France (d'aire $S = 550\,000 \text{ km}^2$) quelle serait la hauteur de la couche de sable ?

■ Considérations à l'échelle microscopique

Ex-T1.3 Vitesse de libération et vitesse quadratique moyenne

1) Calculer numériquement à la surface de la Terre et de la Lune, pour une température $T = 300 \text{ K}$, la vitesse de libération v_l et la vitesse quadratique moyenne pour du dihydrogène et du diazote. Commenter.

Indication : Établir que la vitesse quadratique (définie en **T1.III.§3**) s'écrit : $v_q = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$

Données : Constante de gravitation $G = 6,67.10^{-11} \text{ uSI}$.

Rayon terrestre $R_T = 6,4.10^6 \text{ m}$; masse de la Terre $M_T = 6.10^{24} \text{ kg}$.

Rayon lunaire $R_L = 1,8.10^6 \text{ m}$; masse de la Lune $M_L = 7,4.10^{22} \text{ kg}$.

Masses molaires : $M(H_2) = 2 \text{ g.mol}^{-1}$ et $M(N_2) = 28 \text{ g.mol}^{-1}$.

Constante des GP : $R = 8,314 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$.

2) Quel devrait être l'ordre de grandeur de la température T pour que le diazote, constituant majoritaire de l'atmosphère terrestre, échappe quantitativement à l'attraction terrestre ?

Rép : 1) Pour l'expression de la vitesse de libération → Cf Cours de Mécanique : $v_{l,T} \simeq 11,2 \text{ km.s}^{-1}$ et $v_{l,L} \simeq 2,3 \text{ km.s}^{-1}$. de plus : $v_q(H_2) \simeq 1,9 \text{ km.s}^{-1}$ et $v_q(N_2) \simeq 0,5 \text{ km.s}^{-1}$. 2) Il faudrait $T_T \sim 100\,000 \text{ K}$ (!)

Ex-T1.4 Ordre de grandeur énergétique : (► Sol. p. 5)

Une enceinte de volume $V = 1 \text{ L}$ contient de l'hélium ($M(He) = 4 \text{ g.mol}^{-1}$) de densité molaire $0,1 \text{ mol.L}^{-1}$ à la température de 27°C . Calculer :

1) la vitesse quadratique moyenne v_q et la pression cinétique P ;

Indication : Établir que la vitesse quadratique (définie en **T1.III.§3**) s'écrit : $v_q = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$

2) l'énergie cinétique moyenne d'une molécule e_k ;

T1

T1

- 3) l'énergie interne du système U ;
 4) l'énergie interne molaire U_m , puis l'énergie interne massique u .

Rép : 1) $v_q = 1370 \text{ m.s}^{-1}$; $P = 2,495 \text{ bar}$; 2) $e_k = 6,21.10^{-21} \text{ J}$; 3) $U = 375 \text{ J}$; 4) $U_m = 3750 \text{ J.mol}^{-1}$; $u = 9,35.10^5 \text{ J.kg}^{-1}$

Ex-T1.5 Densité particulaire et volume molaire (► Sol. p. 5)

- 1) calculer le nombre de molécules par cm^3 dans un gaz parfait à 27°C sous une pression de 10^{-6} atmosphère.
 2) Calculer le volume occupé par une mole d'un gaz parfait à la température de 0°C sous la pression atmosphérique normale. En déduire l'ordre de grandeur de la distance moyenne entre molécules.

■ Gaz parfaits

Ex-T1.6 Étude d'une pompe (► Sol. p. 5)

On se propose de gonfler un pneu de volume intérieur $V_p = 40 \text{ L}$ au moyen d'une pompe dont le principe est schématisé ci-contre. La pression extérieure est $P_0 = 1,013 \text{ bar}$ et l'air est considéré comme un gaz parfait. Le corps de pompe a un volume $V = 1 \text{ L}$ et on néglige le volume restant dans la pompe lorsque le piston est enfoncé à fond. Les transformations sont supposées isothermes. Initialement, le piston est complètement enfoncé et le pneu contient de l'air sous la pression P_0 .

- 1) Calculer la pression dans le pneu après un aller-retour du piston.
 2) Quel est le nombre de coups de pompe à donner pour amener la pression intérieure à $2P_0$?

Rép : 1) $P_1 = 1,038 \text{ bar}$; 2) 40 coups de pompe.

Ex-T1.7 Deux récipients

Un récipient (A) de volume $V_A = 1 \text{ L}$, contient de l'air à $t_A = 15^\circ\text{C}$ sous une pression $P_A = 72 \text{ cmHg}$.

Un autre récipient (B) de volume $V_B = 1 \text{ L}$, contient également de l'air à $t_B = 20^\circ\text{C}$ sous une pression $P_B = 45 \text{ atm}$.

On réunit (A) et (B) par un tuyau de volume négligeable et on laisse l'équilibre se réaliser à $t = 15^\circ\text{C}$.

On modélise l'air par un gaz parfait de masse molaire $M = 29 \text{ g.mol}^{-1}$. **Données :** le « centimètre de mercure » est défini par la relation $1 \text{ atm} = 76 \text{ cmHg} = 1,013.10^5 \text{ Pa}$.

Q : Quelle est la pression finale de l'air dans les récipients ? Quelle est la masse d'air qui a été transférée d'un récipient dans l'autre ?

Indications : Exprimer, initialement, les quantités de matière n_A et n_B dans les récipients. En déduire la quantité de matière totale. L'état final étant un état d'équilibre thermodynamique, les variables intensives sont uniformes, dont la densité moléculaire et la pression. En déduire les quantités de matière finales n_{AF} et n_{BF} .

Rép : $m_{B \rightarrow A} = 26,1 \text{ g}$ et $P \simeq 22,5 \text{ bars} \simeq 22,2 \text{ atm}$.

■ Modélisations de gaz réels

Ex-T1.8 Dioxyde de carbone

Pour le dioxyde de carbone (« gaz carbonique »), les coefficients a et b de l'équation d'état de Van der Waals ont pour valeurs respectives $0,366 \text{ kg.m}^5.\text{s}^{-2}.\text{mol}^{-2}$ et $4,29.10^{-5} \text{ m}^3.\text{mol}^{-1}$. On place deux moles de ce gaz dans une enceinte de volume $V = 1 \text{ L}$ à la température de $T = 300 \text{ K}$.

Q : Comparer les pressions données par les équations d'état du gaz parfait et du gaz de Van der Waals, la valeur exacte étant $P = 38,5 \text{ bars}$.

Rép : $P_{\text{GP}} = \frac{nRT}{V} \simeq 4,99.10^6 \text{ Pa}$, soit une erreur relative de $\left| \frac{P - P_{\text{GP}}}{P} \right| \approx 30\%$; $P_{\text{vdW}} = \frac{nRT}{V - nb} - \frac{n^2a}{V^2} \simeq 3,99.10^6 \text{ Pa}$, soit une erreur relative de $\left| \frac{P - P_{\text{vdW}}}{P} \right| \approx 4\%$. Le modèle du gaz parfait est donc inacceptable, tandis que le modèle du gaz de Van der Waals montre une bien meilleure précision.

T1

T1

Ex-T1.9 Point critique et équation réduite d'un gaz de Van der Waals (*)

1) Une mole de gaz de Van der Waals a pour équation d'état : $\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$

Exprimer P en fonction de T et V et calculer les dérivées partielles : $\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T$ et $\left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2}\right)_T$.

2) Montrer qu'il existe un unique état C tel que : $\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = 0$ et $\left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2}\right)_T = 0$.

Déterminer son volume molaire V_C , sa température T_C et sa pression P_C .

3) On pose $\theta = \frac{T}{T_C}$, $\nu = \frac{V}{V_C}$ et $\varpi = \frac{P}{P_C}$.

Montrer que l'équation d'état liant θ , ν et ϖ est universelle, c'est à dire qu'elle ne fait plus intervenir aucune constante dépendant du gaz.

Rép : 1) $\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = -\frac{RT}{(V-b)^2} + \frac{2a}{V^3}$ et $\left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2}\right)_T = \frac{2RT}{(V-b)^3} - \frac{6a}{V^4}$

2) $C\left\{V_C = 3b ; T_C = \frac{8a}{27Rb} ; P_C = \frac{a}{27b^2}\right\}$ - 3) $\left(\varpi + \frac{3}{\nu^2}\right)(\nu - 1) = 8\theta$

Ex-T1.10 Modélisations d'un gaz réel (*)

1) Le tableau ci-dessous donne avec trois chiffres significatifs exacts le volume molaire V (en $m^3.mol^{-1}$) et l'énergie interne molaire U (en $kJ.mol^{-1}$) de la vapeur d'eau à la température $t = 500^\circ C$ pour différentes valeurs de la pression P (en bars). On donne en outre la constante des GP : $R = 8,314 J.K^{-1}.mol^{-1}$.

P	1	10	20	40	70	100
V	$6,43.10^{-2}$	$6,37.10^{-3}$	$3,17.10^{-3}$	$1,56.10^{-3}$	$8,68.10^{-4}$	$5,90.10^{-4}$
U	56,33	56,23	56,08	55,77	55,47	54,78

Justifier sans calcul que la vapeur d'eau ne se comporte pas comme un GP.

On se propose d'adopter le modèle de Van der Waals pour lequel on a, pour une mole de gaz :

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT \quad \text{et} \quad U = U_{GP}(T) - \frac{a}{V}.$$

Calculer le coefficient a en utilisant les énergies internes des états à $P = 1 \text{ bar}$ et à $P = 100 \text{ bars}$.
Calculer b en utilisant l'équation d'état de l'état à $P = 100 \text{ bars}$.

Quelle valeur obtient-on alors pour U à $P = 40 \text{ bars}$?

Quelle température obtient-on alors en utilisant l'équation d'état avec $P = 40 \text{ bars}$ et $V = 1,56.10^{-3} m^3.mol^{-1}$?

Conclure sur la validité de ce modèle.

2) On réalise une détente isochore (ie à volume constant) d'une mole de vapeur d'eau de l'état initial $I \{t_I = 500^\circ C; P_I = 100 \text{ bars}\}$ jusqu'à l'état final $F \{T_F = ?; P_F = 70 \text{ bars}\}$.

Le tableau ci-dessous donne le volume molaire V (en $m^3.mol^{-1}$) et l'énergie interne molaire U (en $kJ.mol^{-1}$) de la vapeur d'eau sous $P = 70 \text{ bars}$ pour différentes valeurs de la température t (en $^\circ C$).

t	300	320	340	360	380	400
V	$5,31.10^{-4}$	$5,77.10^{-4}$	$6,18.10^{-4}$	$6,54.10^{-4}$	$6,87.10^{-4}$	$7,20.10^{-4}$
U	47,30	48,38	49,32	50,17	50,96	51,73

Déterminer la température finale T_F et la variation d'énergie interne $\Delta U = U_F - U_I$.

Rép : 1) $U_{H_2O(g)}$ ne vérifie pas la première loi de Joule : $H_2O(g)$ ne se comporte pas comme un gaz parfait. Modélisation de VdW : $a = 9,23.10^{-1} J.m^{-3}.mol^{-1}$ et $b = 8,2.10^{-5} m^3.mol^{-1}$.

2) $T_F = 599 K$ et $\Delta U = U_F - U_I = -6,1 kJ.mol^{-1}$.

■ Coefficients thermoélastiques et phases condensées

Ex-T1.11 Coefficient de compressibilité isotherme (► Sol. p. 6)

- 1) Rappeler la définition du coefficient de compressibilité isotherme et donner en la démontrant son expression dans le cas d'un gaz parfait.
- 2) L'eau liquide à 20°C , sous $P_0 = 1 \text{ bar}$, a un coefficient de compressibilité isotherme de $\chi_{Tl} = 4,4 \cdot 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$. Comparer cette valeur à celle du coefficient de compressibilité isotherme de l'air χ_{Ta} , assimilé à un gaz parfait, dans les mêmes conditions en effectuant le rapport.
- 3) Calculer la variation de pression ΔP nécessaire pour créer dans chaque cas, à température 20°C constante, une diminution relative de volume $\frac{\Delta V}{V}$ de 1%. Conclure.

Rép : 1) cf. T1 ; 2) $\frac{\chi_{Ta}}{\chi_{Tl}} = 2,27 \cdot 10^4$; 3) $(\Delta P)_{\text{eau}} = 227 \text{ bar}$; $(\Delta P)_{\text{air}} = 0,01 \text{ bar}$

Ex-T1.12 Variation de volume du cuivre (► Sol. p. 6)

Un bloc de cuivre de volume $V = 20 \text{ cm}^3$ est initialement sous la pression $P = 1,013 \text{ bar}$ à la température $T = 295 \text{ K}$. Les variations envisagées seront considérées comme des petites variations.

- 1) On porte sa température à $T' = 295,5 \text{ K}$, sous $1,013 \text{ bar}$. Déterminer l'augmentation de volume correspondante.
- 2) À partir de l'état initial, on élève la pression de $0,050 \text{ bar}$ à 295 K . Déterminer la variation de volume correspondante.

Données : pour le cuivre : $\alpha = 4,9 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$; $\chi_T = 7,2 \cdot 10^{-12} \text{ Pa}^{-1}$.

Rép : 1) $\Delta V = 0,49 \text{ mm}^3$; 2) $\Delta V = -7,2 \cdot 10^{-12} \text{ cm}^3$

Ex-T1.13 Gaz de Van der Waals

Une mole de dioxyde de carbone CO_2 obéit à l'équation de Van der Waals : $(P + \frac{a}{V^2})(V - b) = RT$, où V est le volume molaire du gaz.

Déterminer le coefficient de dilatation à pression constante α en fonction des variables indépendantes T et V , des constantes a , b et de R .

Retrouver son expression α_{GP} dans le cas d'un gaz parfait.

Rép : $\alpha = \frac{R}{-\frac{2a}{V^2}(V-b) + \frac{RTV}{V-b}}$ et on vérifie que $\lim_{a \rightarrow 0 ; b \rightarrow 0} \alpha = \frac{1}{T} = \alpha_{\text{GP}}$.

Ex-T1.14 Gaz de Joule

Une mole de gaz de Joule obéit à l'équation d'état : $P(V - b) = RT$, où V est le volume molaire du gaz.

Déterminer le coefficient de compressibilité isotherme χ_T en fonction des variables indépendantes V , P , et b .

Retrouver son expression $\chi_{T,\text{GP}}$ dans le cas d'un gaz parfait. Exprimer l'écart relatif : $\frac{\chi_T - \chi_{T,\text{GP}}}{\chi_{T,\text{GP}}}$.

Comparer les compressibilités d'un gaz de Joule et d'un gaz parfait.

Rép : $\chi_T = (1 - \frac{b}{V})\frac{1}{P}$ et on vérifie que $\lim_{b \rightarrow 0} \chi_T = \frac{1}{P} = \alpha_{\text{GP}}$.

$\frac{\chi_T - \chi_{T,\text{GP}}}{\chi_{T,\text{GP}}} = -\frac{b}{V} < 0 \rightarrow$; donc le gaz de Joule est moins compressible que le gaz parfait.

Ex-T1.15 Eau liquide

Une mole d'eau liquide est caractérisée dans un certain domaine de températures et de pressions autour de l'état 0 où $\{P_0 = 1 \text{ bar}; T_0 = 293 \text{ K}; V_0 = 10^{-3} \text{ m}^3\}$, par un coefficient de dilatation isobare $\alpha = 3 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$ et par un coefficient de compressibilité isotherme $\chi_T = 5 \cdot 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$ constants.

- 1) Établir que l'équation d'état liant V , P et T de ce liquide est :

$$\ln \frac{V}{V_0} = \alpha(T - T_0) - \chi_T(P - P_0)$$

- 2) Calculer son volume molaire sous $P = 1\,000\text{ bars}$ et à $T = 293\text{ K}$. Commenter.
 3) Une mole d'eau liquide est enfermée dans une bouteille métallique de volume V_0 constant. Par suite d'un incendie, la température passe de $T_0 = 293\text{ K}$ à $T = 586\text{ K}$. Calculer la pression P dans le récipient et commenter. Reprendre le calcul pour un gaz parfait et commenter.

Rép : 2) $V = 9,51 \cdot 10^{-4}\text{ m}^3$ soit $|\frac{\Delta V}{V_0}| = 5\%$. 3) $P = P_0 + \frac{\alpha(T-T_0)}{\chi T} = 1,8 \cdot 10^3\text{ bar}$: cette pression est très élevée : la bouteille risque d'exploser.

Solution Ex-T1.1

- 1) Comme $V_m = \frac{V}{n}$, on a :

$$\left(P + \frac{a}{V_m^2}\right)(V_m - b) = RT \Leftrightarrow \left(P + \frac{n^2 a}{V^2}\right)\left(\frac{V}{n} - b\right) = RT \Leftrightarrow \left(P + \frac{n^2 a}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$$

Rq : on peut écrire l'équation d'état sous la forme $\left(P + \frac{A}{V^2}\right)(V - B) = nRT$ en posant $B = nb$ et $A = n^2 a$.

B est une grandeur extensive puisqu'elle est additive, si $n = n_1 + n_2$, $B = nb = n_1 b + n_2 b = B_1 + B_2$. A est aussi une grandeur extensive, mais elle n'est pas additive car $n^2 a \neq n_1^2 a + n_2^2 a$.

- 2) $P(V - nb) \exp\left(\frac{na}{RTV}\right) = nRT$.

Solution Ex-T1.2

Volume occupé : $V = N \cdot v = 6 \cdot 10^{13}\text{ m}^3 = 6 \cdot 10^{16}\text{ L}$ (60 millions de milliards de litres!). Ce sable étalé sur $S = 5,5 \cdot 10^5\text{ km}^2 = 5,5 \cdot 10^{11}\text{ m}^2$ formerait une couche de hauteur $h = \frac{V}{S} \simeq 110\text{ m}$ (!).

Solution Ex-T1.4

Notation : m , masse d'une molécule i ; n^* , densité particulaire; n_m^* , densité molaire.

1) $v_q = \sqrt{\frac{3 \cdot k_B \cdot T}{m}} = \sqrt{\frac{3 \cdot (R/N_a) \cdot T}{M/N_a}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \simeq 1\,370\text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$;

$$P = \frac{1}{3} \cdot n^* \cdot m \cdot v_q^2 = \frac{1}{3} \cdot n_m^* \cdot N_a \cdot m \cdot v_q^2 = \frac{1}{3} \cdot n_m^* \cdot M \cdot v_q^2 = n_m^* \cdot R \cdot T = 2,495\text{ bar}.$$

2) $e_k = \langle e_{k,i} \rangle = \frac{1}{2} m \cdot v_q^2 = \frac{1}{2} \frac{M}{N_a} \cdot v_q^2 = 6,21 \cdot 10^{-21}\text{ J}$

3) $U = U_{\text{GP}} = N \cdot e_k = N_a \cdot n \cdot e_k = N_a \cdot n_m^* \cdot V \cdot e_k \simeq 375\text{ J}$

4) $U_m = \frac{U}{n} = \frac{U}{n_m^* \cdot V} = 3,75\text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$; $u = \frac{U}{m} = \frac{U_m}{M} = 937,2\text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$

Solution Ex-T1.5

1) D'après l'équation d'état du gaz parfait, le nombre de molécules par unité de volume est $n^* = \frac{N}{V} = \frac{P}{k_B T} \simeq \frac{10^{-6} \cdot 1,01325 \cdot 10^5}{1,38 \cdot 10^{-23} \times 300} \simeq 2,5 \cdot 10^{19}$ molécules par mètre cube soit $n^* \simeq 2,5 \cdot 10^{13}$ molécules par cm^3 ou encore $n^* \simeq 4 \cdot 10^{-11}\text{ mol} \cdot \text{cm}^{-3}$.

2) Le volume molaire cherché est : $V_m = \frac{RT}{P} = \frac{8,314 \times 273,15}{1,013 \cdot 10^5} = 22,4 \cdot 10^{-3}\text{ m}^3 = 22,4\text{ L}$.

Ce volume molaire permet de définir la densité particulaire n^* et le volume de l'espace v_m occupé par une molécule : $n^* = \frac{N_a}{V_m} = \frac{1}{v_m}$. En supposant un volume v_m cubique, d'arrête d , distance moyenne entre deux molécule, on obtient : $d = (v_m)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{n^*}\right)^{\frac{1}{3}} \simeq 3,3\text{ nm}$

Solution Ex-T1.6

1) La quantité de matière supplémentaire d'air (assimilé à un gaz parfait unique) introduite dans le volume V_p après un coup de pompe est : $\Delta n = \frac{P_0 V}{RT}$. Elle correspond à une augmentation de pression de la pression de l'air dans le pneu de $\Delta P = \frac{\Delta n \cdot RT}{V_p} = P_0 \cdot \frac{V}{V_p}$.

La pression au bout d'un premier coup de pompe est donc : $P_p = P_1 = P_0 + \Delta P = P_0 \left(1 + \frac{V}{V_p}\right) = 1,038\text{ bar}$

2) Au bout de deux coups de pompe : $P_p = P_2 = P_1 + \Delta P = P_0 \left(1 + 2 \cdot \frac{V}{V_p}\right)$

... au bout de k coups de pompe : $P_p = P_K = P_{k_1} + \Delta P = P_0(1 + k \cdot \frac{V}{V_p})$

Si on impose $P_k = 2P_0$, on obtient : $k = \frac{V_p}{V} (\frac{P_k}{P_0} - 1) = 40$ coups de pompe nécessaires pour gonfler le pneu.

Solution Ex-T1.11

1) cf. T1; 2) $\frac{\chi_{Ta}}{\chi_{Ti}} = \frac{1}{P \cdot \chi_{Ti}} = 2,27 \cdot 10^4$

3) Pour une transformation isotherme ($T = \text{Cte}$), on a $\chi_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T = -\frac{1}{V} \frac{\Delta V}{\Delta P}$, soit : $\Delta P = -\frac{1}{\chi_T} \frac{\Delta V}{V}$. Avec $\frac{\Delta V}{V} = -1\%$, on trouve : $(\Delta P)_{\text{eau}} = -\frac{1}{\chi_{Ti}} \frac{\Delta V}{V} = 227,2 \text{ bars}$ et $(\Delta P)_{\text{air}} = -P \cdot \frac{\Delta V}{V} = 0,01 \text{ bar}$

Solution Ex-T1.12

Pour un corps pur monophasé (donc divariant) : $V = V(P, T)$.

Les variations (réelles) des grandeurs d'état sont des « petites » variations : on peut donc utiliser le calcul différentiel pour les évaluer.

Ainsi, ΔV s'évalue à partir de l'expression littérale de dV . or, au cours d'une variation élémentaire des variables T et P , la variation élémentaire de la fonction $V(T, P)$ s'écrit :

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T dP + \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P dT = -V \cdot \chi_T \cdot dP + V \cdot \alpha \cdot dT$$

1) Pour une transformation isobare ($dP = 0$) entre l'état initial $\{P_0, T_0, V_0\}$ et l'état final $\{P_0, T_0 + \Delta T, V_0\}$: $dV = V \cdot \alpha \cdot dT \rightarrow \Delta V = V_0 \cdot \alpha \cdot \Delta T = 0,49 \text{ mm}^3$

2) Pour une transformation isotherme ($dT = 0$) entre l'état initial $\{P_0, T_0, V_0\}$ et l'état final $\{P_0 + \Delta P_0, T_0, V_0\}$: $dV = -V \cdot \chi_T \cdot dP \rightarrow \Delta V = -V_0 \cdot \chi_T \cdot \Delta P = -7,2 \cdot 10^{-7} \text{ cm}^3$

■ « Atmosphère ! atmosphère !... »

Ex-T2.1 Masse de l'atmosphère

On travaille avec le modèle de l'atmosphère isotherme avec $T = 290 \text{ K}$. Le champ de pesanteur est supposé uniforme ($g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$) et l'air est assimilé à un gaz parfait de masse molaire $M = 29 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$. On note $P_0 = 10^5 \text{ Pa}$ la pression de l'air au niveau du sol ($z = 0$) et on choisit un axe vertical Oz ascendant.

1) retrouver la loi du nivellement barométrique $P(z)$ pour l'atmosphère isotherme. À quelle altitude z_1 la pression vaut-elle $\frac{P_0}{2}$? **A.N.**

2) En supposant cette loi valable de $z = 0$ à « l'infini » calculer la masse M_{atm} de l'atmosphère et faire l'application numérique avec $R_T = 6400 \text{ km}$.

Rép : 1) $z_1 = 5900 \text{ m}$; 2) Conseil pour éviter une intégration par partie : remarquer que l'épaisseur de l'atmosphère est telle que $z \ll R_T \rightarrow M_{\text{atm}} \approx 5 \cdot 10^{18} \text{ kg}$.

Ex-T2.2 Pression atmosphérique en altitude

Calcul de la pression atmosphérique au sommet du Mont Blanc (4807 m) dans les deux cas suivants :

1) On suppose que la température de l'atmosphère est constante et égale à T_0 .

2) On suppose que la température varie avec l'altitude suivant la loi :

$$T = T_0 - A \cdot z \quad \text{avec} \quad A = 6,45 \cdot 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{m}^{-1}$$

Établir alors l'équation différentielle $\frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{R} \frac{dz}{T_0 - Az}$ et en l'intégrant par séparation des variables, déterminer la loi de variation de la pression avec l'altitude $P(z)$.

Données : Température à l'altitude $z = 0$: $T_0 = 290 \text{ K}$;

pression à l'altitude $z = 0$: $P_0 = 1,013 \text{ bar}$; masse molaire de l'air : $M = 29 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

Rép : 1) $P = 0,575 \cdot 10^5 \text{ Pa}$; 2) $P(z) = P_0 \left(1 - \frac{Az}{T_0}\right)^{\frac{Mg}{RA}} \rightarrow P = 0,557 \cdot 10^5 \text{ Pa}$.

Ex-T2.3 Variation de g avec l'altitude

Dans le modèle de l'atmosphère isotherme, à la température T , on considère ici que le champ de pesanteur g varie avec l'altitude suivant la relation : $g(z) = g_0 \cdot \left(\frac{R_T}{R_T + z}\right)^2$, R_T représentant le rayon de la Terre.

Au niveau du sol ($z = 0$), on note g_0 le champ de pesanteur et P_0 la pression.

→ Montrer que la loi de variation $P(z)$ dans ces conditions s'écrit :

$$\ln \frac{P(z)}{P_0} = -\frac{M g_0 R_T^2}{R \cdot T} \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T + z} \right)$$

Ex-T2.4 Atmosphère polytropique (*)

L'air est assimilé à un GP de masse molaire M et on se donne dans l'atmosphère une relation phénoménologique de la forme : $\frac{P(z)}{\rho(z)^k} = \text{Cte}$, appelée relation polytropique d'indice k . k est une constante donnée, ajustable a posteriori aux données expérimentales. Le modèle de l'atmosphère polytropique constitue une généralisation du modèle de l'atmosphère isotherme pour lequel on aurait $k = 1$. Dans la suite on prend $k \neq 1$.

Au niveau du sol, en $z = 0$, on note la pression P_0 , la température T_0 et la masse volumique ρ_0 .

→ Établir que $P(z)$ est donnée par la relation implicite suivante :

$$\frac{k}{k-1} \left(P^{1-\frac{1}{k}} - P_0^{1-\frac{1}{k}} \right) = -\frac{\rho_0 g z}{P^{\frac{1}{k}}} \rightarrow \text{en déduire } T(z) \text{ et montrer que } \frac{dT}{dz} \text{ est une constante.}$$

A. N. : calculer k sachant que $\frac{dT}{dz} = -7 \cdot 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{m}^{-1}$.

Rép : $T(z) = -\frac{k-1}{k} \frac{Mgz}{R} + T_0 \rightarrow k = \frac{Mg}{R} \frac{1}{\frac{dT}{dz} + \frac{Mg}{R}} = 1,26$

■ Poussée d'Archimède

Ex-T2.5 Ascension d'un ballon de volume constant (*)

Un ballon sphérique, de volume fixe $V = 3 \text{ L}$, est gonflé à l'hélium ($M = 4 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$) à la pression de 1 bar et à la température de 293 K . L'enveloppe du ballon est en aluminium et a une masse $m = 2 \text{ g}$.

La pression au niveau du sol vaut $P_0 = 1 \text{ bar}$ et la température vaut $T_0 = 293 \text{ K}$. La température varie en fonction de l'altitude selon la loi : $T(z) = T_0 (1 - az)$, avec $a = 2 \cdot 10^{-2} \text{ km}^{-1}$.

- 1) Exprimer la pression $P(z)$ à l'altitude z en fonction de T_0 , P_0 , a et de la constante $K = \frac{M_{\text{air}} g}{RT_0 a}$.
- 2) On lâche le ballon. Jusqu'à quelle altitude s'élèvera-t-il ?

Rép : 1) $P(z) = P_0 (1 - az)^K$; 2) $z = \frac{1}{a} \left[1 - \left(\frac{RT_0 m}{P_0 M_{\text{air}} V} + \frac{M}{M_{\text{air}}} \right)^{\frac{1}{K-1}} \right] = 3580 \text{ m}$

Ex-T2.6 Ascension d'un ballon-sonde

Un ballon sonde, de masse m , sert à emmener à haute altitude un appareillage en vue d'effectuer des mesures. L'enveloppe du ballon contient n moles de gaz parfait (H_2 , $M(H_2) = 2 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$). L'atmosphère est assimilée à un gaz parfait, de masse molaire $M_{\text{air}} = 29 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$, en équilibre isotherme à la température $T_0 = 273 \text{ K}$. La pression atmosphérique est $P_0 = 1 \text{ bar}$ au sol.

1) Quelle est la force ascensionnelle $\vec{F}^{\uparrow} = F \vec{e}_z$ ressentie par le ballon ? Évaluer la quantité de matière minimale n_0 assurant le décollage de celui-ci pour $m = 50 \text{ kg}$, puis le volume V_0 correspondant, à l'altitude nulle de départ.

2) Le volume du ballon (initialement flasque) ne peut dépasser une valeur V_1 sans que celui-ci n'éclate. Montrer que cela implique l'existence d'une altitude maximale atteinte par le ballon z_1 , que l'on exprimera en fonction de n , n_0 , V_0 , V_1 et $H = \frac{RT_0}{M_{\text{air}} g}$.

3) En fait, le ballon possède une soupape qui lui permet, au delà de l'altitude z_1 , d'évacuer du gaz à volume V_1 constant. Montrer que la force ascensionnelle s'annule alors pour une altitude z_2 supérieure à z_1 .

Rép : 1) $F_z = [n \cdot (M_{\text{air}} - M(H_2)) - m] \cdot g$; $V_0 = 42 \text{ m}^3$; 2) $z_1 = H \cdot \ln\left(\frac{n_0 \cdot V_1}{n \cdot V_0}\right)$; 3) $z_2 = H \cdot \ln\left(\frac{V_1}{V_0}\right)$.

Ex-T2.7 Iceberg : Un iceberg de volume total V flotte à la surface de l'eau. Déterminer son volume v émergé en fonction de V , de la masse volumique de la glace μ_g et de la masse volumique de l'eau liquide μ_e . Quel pourcentage de l'iceberg est donc immergé ?

Données : $\frac{\mu_g}{\mu_e} = 0,9$; on néglige la poussée d'Archimède de l'air.

Rép : $v = 0,1V$

Ex-T2.8 Couronne « en toc » ? (► Sol. p. 11)

Immergée dans l'eau, une couronne de $m = 14,7 \text{ kg}$ a une masse apparente de $13,4 \text{ kg}$. Cette couronne est-elle en or pur ?

Donnée : masses volumiques de l'or, de l'argent et du plomb :

$\rho_{\text{Au}} = 19,3 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $\rho_{\text{Ag}} = 10,5 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et $\rho_{\text{Pb}} = 11,3 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

Ex-T2.9 Volume de l'enveloppe d'une montgolfière (► Sol. p. 11)

Quel volume d'hélium doit contenir une montgolfière pour pouvoir soulever une masse $m = 800 \text{ kg}$ (incluant le poids de la nacelle, de l'enveloppe, du chargement, ...) ?

Donnée : masses volumiques, à $T = 273 \text{ K}$ et $P = 1 \text{ atm}$: $\rho_{\text{air}} = 1,29 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et $\rho_{\text{He}} = 0,179 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

Ex-T2.10 Équilibre d'un bouchon de liège

Un bouchon de liège cylindrique de hauteur $H = 5 \text{ cm}$ et de section $s = 2 \text{ cm}^2$ est placé verticalement dans une éprouvette graduée également cylindrique, de diamètre légèrement supérieur. Les frottements sur les parois sont négligés. L'éprouvette contient une quantité d'eau suffisante pour que le bouchon flotte sans toucher le fond.

Données : Masses volumiques : $\rho_{\text{eau}} = 1,00 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$; $\rho_{\text{liège}} = 0,24 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$; $\rho_{\text{glace}} = 0,92 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$.

1) Déterminer la hauteur h de liège immergée.

2) On pose sur le bouchon une pièce de monnaie de masse $m = 6 \text{ g}$. Quelle est la nouvelle hauteur immergée h' ?

3) On remplace le bouchon par un glaçon cylindrique de même forme. Quelle est la hauteur de glace immergée h'' ? Que se passe-t-il si on pose la pièce précédente sur le glaçon ?

Rép : 1) $h = 1,2 \text{ cm}$; 2) $h' = 4,2 \text{ cm}$; 3) $h'' = 4,6 \text{ cm}$.

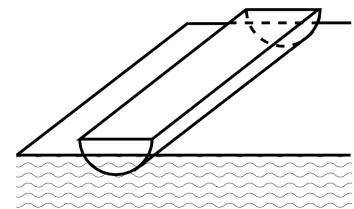
Ex-T2.11 Oscillations d'un demi-cylindre flottant (*)

Un demi-cylindre de rayon R flotte à la surface d'un liquide de masse volumique ρ .

1) À l'équilibre, il est enfoncé de $\frac{R}{2}$ dans le liquide. Quelle est sa masse volumique μ ?

2) Hors équilibre, quelle est la période des petites oscillations verticales de l'objet ?

Rép : 1) $\mu = \left(\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2\pi}\right)\rho$; 2) $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g} \left(\frac{\pi}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{4}\right)}$



■ Liquides

Ex-T2.12 Pression dans une fosse océanique (*) (► Sol. p. 11)

On considère une fosse océanique de profondeur $H = 10 \text{ km}$. La pression à la surface de l'eau est $P_0 = 1 \text{ bar}$ et on supposera la température uniforme et égale à T_0 .

1) Calculer la pression $P(H)$ au fond de la fosse en supposant l'eau incompressible. **A.N.**

2) On veut déterminer $P(H)$ en tenant compte de la compressibilité de l'eau. On doit donc considérer que la masse volumique ρ de l'eau dépend maintenant de la profondeur z (prise nulle à la surface libre de l'eau). On notera ρ_0 la masse volumique de l'eau à la surface.

a) Montrer que le coefficient de compressibilité isotherme peut s'écrire : $\chi_T = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_T$

→ Que devient cette expression puisque $T = T_0 = \text{Cte}$? En déduire $\frac{d\rho}{dz}$

b) déduire de la question précédente les expressions de $\rho(z)$, puis de $P(z)$

c) **A.N.** : calculer $\rho(H)$ et $P(H)$ avec $\chi_T = 4,9 \cdot 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$. Commenter.

Rép : **1)** $P(H) = 9,8 \cdot 10^2 \text{ bars}$; **2.a)** $\frac{d\rho}{dz} = \chi_T g \rho^2$; **2.b)** séparer les variables dans l'équation précédente, puis intégrer entre la surface libre ($z = 0$) et z : $\rho(z) = \frac{\rho_0}{1 - \rho_0 g z \chi_T}$ et $P(z) = P_0 + \frac{1}{\chi_T} \ln \left(\frac{1}{1 - \rho_0 g z \chi_T} \right)$

Ex-T2.13 Tube coudé en rotation (*) (► Sol. p. 12)

Un tube coudé plonge dans de l'eau ($\rho_e = 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$). Il tourne autour de la verticale Oz ascendante dans le référentiel terrestre à la vitesse angulaire ω . La pression atmosphérique est notée P_a . On note ρ la masse volumique de l'air supposée uniforme et constante. La section du tube est supposée très faible.

1) On raisonne dans le référentiel lié au tube, qui n'est donc pas galiléen. L'air est en équilibre dans ce référentiel.

On considère une tranche élémentaire d'air de masse dm comprise entre les abscisses x et $x + dx$.

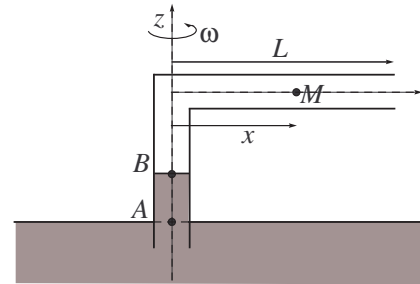
a) Quelles sont les forces qui s'exercent sur cette tranche élémentaire de fluide ?

b) On fait l'hypothèse que l'effet du poids est négligeable. En s'inspirant de la seconde démonstration de la RFSF établir en cours, établir que l'équation différentielle reliant la dérivée de la pression $\frac{dP}{dx}$, ρ , ω et x .

c) calculer la pression $P(x)$ de l'air dans le tube à une distance x de l'axe Oz en fonction de P_a , ω , L et x .

2) déterminer la dénivellation $d = AB$ du liquide.

Rép : **1.b)** $\frac{dP}{dx} = \rho \omega^2 x$; **1.c)** $P(x) = P_a + \frac{1}{2} \rho \omega^2 (x^2 - L^2)$; **2)** $d = \frac{1}{2 \rho_e g} \rho \omega^2 L^2$.

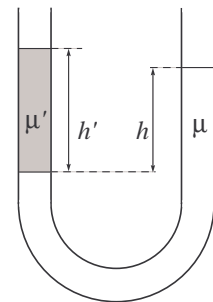


Ex-T2.14 Hydrostatique dans un tube en U

Soit un tube en U dans lequel se trouvent deux liquides de masses volumiques respectives μ et μ' . On note respectivement h et h' les dénivellations entre les surfaces libres des liquides et leur interface.

→ Exprimer le rapport des dénivellations en fonction des masses volumiques des deux liquides.

Rép : $\frac{h'}{h} = \frac{\mu}{\mu'}$.



Ex-T2.15 Équilibre dans un tube en U

Un tube en U de section constante $s = 1 \text{ cm}^2$, ouvert aux deux extrémités, contient de l'eau.

1) On ajoute dans la branche de droite un volume $V_h = 6 \text{ cm}^3$ d'huile.

→ Déterminer la dénivellation entre la surface libre de l'eau et la surface de séparation (interface) eau-huile.

2) À partir de l'état d'équilibre précédent, on ajoute dans l'autre branche du tube en U un volume $V_a = 10 \text{ cm}^3$ d'acétone.

→ Déterminer la dénivellation d entre les deux interfaces eau-huile et eaux-acétone ainsi que la dénivellation d' entre les deux surfaces libres.

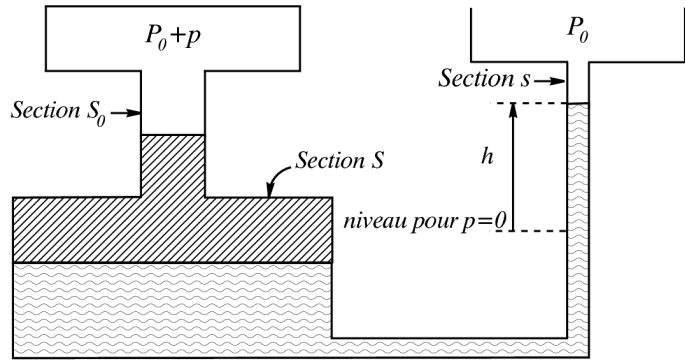
Données : Masses volumiques : $\rho_{\text{eau}} = 1,00 \text{ g.cm}^{-3}$; $\rho_{\text{huile}} = 0,90 \text{ g.cm}^{-3}$; $\rho_{\text{acétone}} = 0,79 \text{ g.cm}^{-3}$.

Rép : **1)** $h_{\text{eau}} = 5,4 \text{ cm}$; **2)** $d = 2,5 \text{ cm}$ et $d' = 1, \text{ cm}$.

Ex-T2.16 Manomètre différentiel (*)

Relier le déplacement du niveau du liquide dans le manomètre différentiel représenté ci-dessous à la surpression p régnant dans le récipient de gauche.

Commenter le résultat en le comparant à la relation que l'on obtiendrait pour un manomètre classique à tube de section constante ($S = s = S_0$).



Rép : $p = \rho gh \frac{s + S}{S_0}$

Ex-T2.17 Dilatation d'un Gaz Parfait

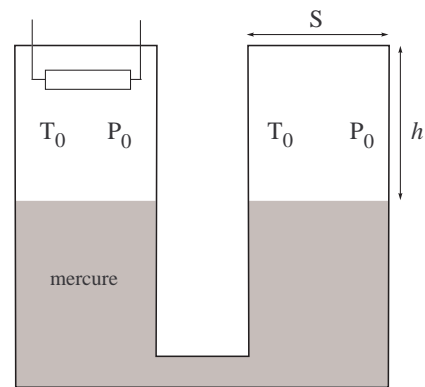
On considère le dispositif suivant, rempli partiellement de mercure et dont chacune des deux branches, hermétiquement scellée, contient une même quantité de gaz parfait à la température T_0 , sous la pression P_0 .

La hauteur commune aux deux colonnes de gaz est h et la section des deux récipients est S .

Données : $T_0 = 293 \text{ K}$; $P_0 = 1,013 \text{ bar}$; $h = 40 \text{ cm}$ et $\rho_{\text{mercure}} = 13,6 \text{ g.cm}^{-3}$.

On chauffe, au moyen de la résistance, la gaz contenu dans une des deux branches, jusqu'à la température T_1 . À l'équilibre, la dénivellation entre les deux surfaces libres du mercure est $d = 10 \text{ cm}$.

→ Calculer la température T_1 .



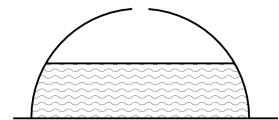
Rép : $T_1 = T_0 \left[\frac{2h + d}{2h - d} + \frac{\rho g d}{P_0} \frac{2h + d}{2h} \right]$

Forces de pression

Ex-T2.18 Soulèvement d'une calotte sphérique

Pour quelle hauteur d'eau la cloche sphérique de rayon R , de masse m , renversée sur le plan horizontal, va-t-elle se soulever ?

Rép : $h = \left(\frac{3m}{\rho\pi} \right)^{\frac{1}{3}} < R \Rightarrow m < \frac{R^3 \rho\pi}{3}$



Ex-T2.19 Poussée exercée sur une paroi plane

Un récipient contient de l'eau de masse volumique ρ .

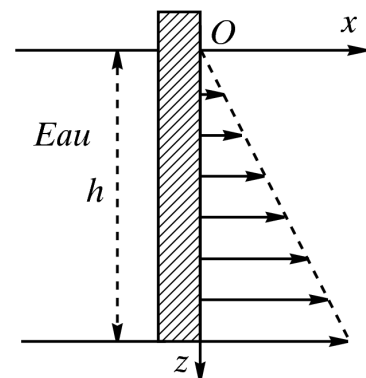
On s'intéresse aux efforts exercés par le fluide sur la paroi plane du récipient de surface $S = hL$.

1) Quelle est la poussée exercée par le fluide sur un élément de paroi horizontal ? sur toute la paroi ?

2) Montrer que, pour le calcul du moment résultant de ces actions, tout se passe comme si cette force résultante s'appliquait en un point C de la paroi, appelé Centre de Poussée, à déterminer.

Rép : 1) $\vec{F} = \frac{1}{2} \rho g L h^2 \vec{e}_x$;

2) $\vec{M}_O = \frac{1}{3} \rho g L h^3 \vec{e}_y = \vec{OC} \times \vec{F}$ avec $\vec{OC} = \frac{2}{3} h \vec{e}_z$.

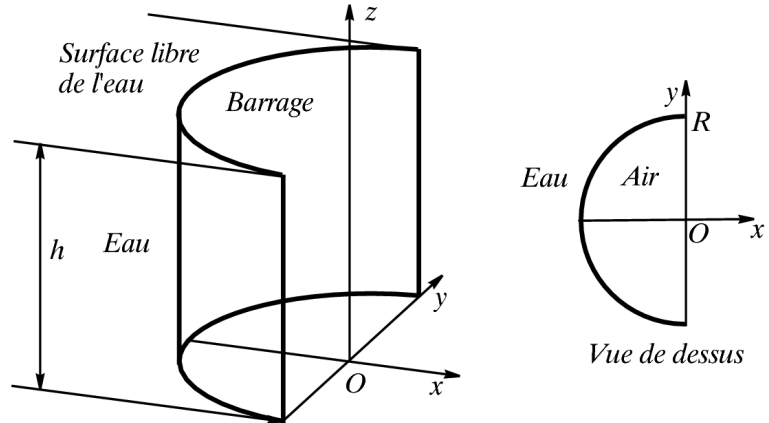


Ex-T2.20 Calcul d'une résultante des force de pression - barrage hémicylindrique

Le barrage hémicylindrique de rayon R représenté sur la figure ci-contre est rempli d'eau sur une hauteur h .

→ Déterminer la résultante des forces exercées par l'air et par l'eau.

→ Comparer à la résultante exercée sur un barrage plan de hauteur h et de largeur L (cf. exercice précédent).



Rép : $\vec{F} = \rho g R h^2 \vec{e}_x$

Solution Ex-T2.8

Le poids apparent de l'objet immergé P' est le poids réel P de la couronne (de masse volumique ρ_0 et de volume V) soustrait du poids des fluides déplacés (l'eau en l'occurrence) : $P' = P + F_A = P - P_f = mg - m_f g = \rho_0 V g - \rho_f g V = (\rho_0 - \rho_{\text{eau}}) V g$.

On a donc : $\frac{P}{P - P'} = \frac{mg}{(m - m_f)g} = \frac{\rho_0}{\rho_0 - \rho_{\text{eau}}} \Rightarrow \rho_0 = \frac{P}{P - P'} \rho_{\text{eau}} = 11,3 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$: la couronne est certainement en plomb et non en or pur !

Solution Ex-T2.9

La poussée d'Archimède subie par le volume V d'hélium de la montgolfière est égale à l'opposée du poids de l'air atmosphérique déplacé ($|F_A| = P_f = \rho_{\text{air}} V g$). Cette poussée doit au moins compenser le poids correspondant à la masse m de la montgolfière (enveloppe, poids d'hélium, nacelle et chargement) : $|F_A| = (m_{\text{He}} + m)g \Leftrightarrow \rho_{\text{air}} V g = (\rho_{\text{He}} V + m)g$, qui conduit à :

$V = \frac{m}{\rho_{\text{air}} - \rho_{\text{He}}} \simeq 720 \text{ m}^3$

Solution Ex-T2.12

1) On choisit l'axe Oz descendant (comme dans la question 2)). Pour un fluide incompressible, la RFSF conduit à : $P(z) = P_0 + \rho g z$. On a donc : $P(H) = P_0 + \rho g H = 980 \text{ bars}$.

2.a) Par définition (→ Cf Cours T1), le coefficient de compressibilité isotherme s'écrit :

$\chi_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T$. Considérons une particule fluide centrée en M , à la profondeur z , de masse constante m (on travaille avec un système fermé) et de volume $V : \{M, dm, dV\}$. En notant $dV = \delta V$, χ_T s'écrit à l'échelle mésoscopique : $-\frac{1}{\delta V} \left(\frac{\partial(\delta V)}{\partial P} \right)_T$ et $dm = \rho \delta V \Leftrightarrow \frac{d\rho}{\rho} + \frac{d(\delta V)}{\delta V} = 0$,

ce qui conduit à : $\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{d(\delta V)}{\delta V}$, soit, en différentiant $\rho = \rho(P, T)$ et $\delta V = \delta V(P, T)$:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\rho}{\rho} &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_T dP - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P dT \\ -\frac{d(\delta V)}{\delta V} &= \underbrace{-\frac{1}{\delta V} \left(\frac{\partial \delta V}{\partial P} \right)_T}_{\chi_T} dP - \frac{1}{\delta V} \left(\frac{\partial \delta V}{\partial T} \right)_P dT \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{d(\delta V)}{\delta V}} \chi_T = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_T$$

Comme la température T est uniforme (et constante), on a

$\chi_T = \chi_T = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_T = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dP} = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz} \frac{dz}{dP} = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz} \frac{1}{\frac{dP}{dz}} \xrightarrow{\frac{dP}{dz} = +\rho z \text{ car } Oz \text{ desc.}} \frac{d\rho}{dz} = \chi_T g \rho^2$

2.b) En séparant les variables dans l'équation précédente : $\frac{d\rho}{\rho^2} = \chi_T g dz$, puis en intégrant entre la surface libre ($z = 0$) et z :

$$\int_{\rho_0}^{\rho(z)} \frac{d\rho'}{\rho'^2} = \int_0^z \chi_T g dz' \Rightarrow -\frac{1}{\rho(z)} + \frac{1}{\rho_0} = \chi_T g z \Leftrightarrow \rho(z) = \frac{\rho_0}{1 - \chi_T \rho_0 g z}$$

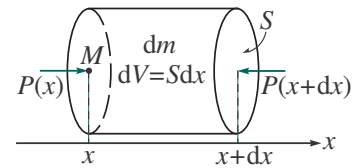
La **RFSF** $\frac{dP}{dz} = \rho(z)g$ conduit à $dP = \rho(z)g dz$, soit, par intégration :

$$\int_{P_0}^{P(z)} dP' = \int_0^z \frac{\rho_0 g}{1 - \chi_T \rho_0 g z'} dz' \Rightarrow P(z) = P_0 + \frac{1}{\chi_T} \ln \left(\frac{1}{1 - \rho_0 g z \chi_T} \right)$$

2.c) On trouve $\rho(H) = 1,05 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ et $P(H) = 1\,005 \text{ bars}$. Du fait du caractère compressible de l'eau, sa densité au fond de la fosse océanique est 5% supérieure à celle de la surface : l'eau est donc peu compressible et la valeur de $P(H)$ est très peu différente de celle calculée à la première question.

Solution Ex-T2.13

1.a) On travaille dans le référentiel \mathcal{R} lié au tube, qui est non galiléen car en rotation dans le référentiel terrestre \mathcal{R}_T . Les forces qui s'exercent sur une tranche élémentaire d'air de masse dm sont :



- le poids $d\vec{P} = dm \vec{g}$

- la force pressante qui s'exerce sur la paroi latérale du cylindre élémentaire $d\vec{F}_{pl}$

- la force pressante qu'exerce le reste de l'air en x : $d\vec{F}_p(x) = P(x)S\vec{e}_x$

- la force pressante qu'exerce le reste de l'air en $x + dx$: $d\vec{F}_p(x + dx) = -P(x + dx)S\vec{e}_x$

- la force d'inertie d'entraînement centrifuge : $d\vec{F}_{ie} = -dm\vec{a}_e(M) = dm\omega^2\vec{HM} = dm\omega^2 x\vec{e}_x$

Rq : la force de Coriolis est nulle car la vitesse relative de la particule fluide est nulle, l'énoncé précisant que « l'air est en équilibre » dans le référentiel \mathcal{R} lié au tube.

1.b) La **RFSF** donne : $dm\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = d\vec{P} + d\vec{F}_{pl} + d\vec{F}_p(x) + d\vec{F}_p(x + dx) + d\vec{F}_{ie}$

Comme le poids est négligeable, cela revient à négliger $d\vec{F}_{pl}$ (qui le compense, le mouvement, lorsqu'il a lieu, ne pouvant se faire que selon Ox), la **RFSF** devient, en projection selon Ox , à l'équilibre :

$$P(x)S - P(x + dx)S + dm\omega^2 x = 0 \quad \frac{dm = \rho \cdot dV = \rho \cdot S dx}{P(x+dx) - P(x) = dP = \frac{dP}{dx} dx} \rightarrow -\frac{dP}{dx} dx \cdot S + \rho \cdot S dx \cdot \omega^2 x = 0$$

D'où : $\frac{dP}{dx} = \rho\omega^2 x$

1.c) Après avoir séparé les variables, on intègre l'équation précédente, sachant que $P(L) = P_a$:

$$\int_{P(x)}^{P(L)} dP = \int_x^L \rho\omega^2 x \cdot dx \Rightarrow P(L) - P(x) = \rho\omega^2 \left(\frac{L^2}{2} - \frac{x^2}{2} \right) \Leftrightarrow P(x) = P_a + \frac{1}{2}\rho\omega^2(x^2 - L^2)$$

2) On peut calculer la pression $P(N)$ de l'air dans le tube horizontal pour $x = 0$: $P(N) = P_a - \frac{1}{2}\rho\omega^2 L^2$. Cette pression est quasiment la pression $P(B)$ car la pression d'un gaz varie très peu avec l'altitude pour de petites dénivellations (\rightarrow Cf Cours **T2**) $\rightarrow P(B) = P(N)$.

La **RFSF** dans le liquide conduit à : $P(A) + \rho_e g z_A = P(B) + \rho_e g z_B$, avec $P(A) = P_a$ (isobare du liquide sur le plan horizontal passant par A).

On en déduit : $d = z_B - z_A = \frac{1}{2\rho_e g} \rho\omega^2 L^2$