EXT2-19 : Poussée exercée sur une paroi plane :

1) la force élémentaire exercée sur la surface élém de la paroi : $\vec{dF} = \vec{dF}_{eau} + \vec{dF}_{atmosphère}$

$$\boxed{\vec{dF}} = \left[(P_0 + \rho g z) - P_0\right]\vec{dS} = \rho g z\,(L\,dz)\,\vec{e_x}$$ d'où : $\vec{F} = F\,\vec{e_x}$

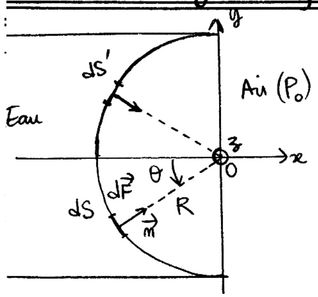
$$F = \int_0^h \rho g z L\,dz\ \vec{e_x} \qquad \boxed{\vec{F} = \frac{1}{2}\rho g L h^2\,\vec{e_x}}$$

2) $$\boxed{\vec{\mathcal{M}}_O} = \begin{cases} \int d\vec{\mathcal{M}}_O = \int \vec{OM}\times\vec{dF} = \int_0^h z\vec{e_z}\times \rho g z L\,dz\,\vec{e_x} = \boxed{\rho g L\frac{h^3}{3}\,\vec{e_y}} \\ \vec{OC}\times\vec{F} = z_c\vec{e_z}\times\frac{1}{2}\rho g L h^2\,\vec{e_x} = \frac{1}{2}\rho g L h^2 z_c\,\vec{e_y} \end{cases}$$

Ces résultats sont identiques en prenant $z_c \equiv \frac{2}{3}h$

Tout se passe comme si cette force résultante s'appliquait au centre de poussée C avec $\boxed{\vec{OC} = \frac{2}{3}h\,\vec{e_z}}$

EXT2-20 : Barrage Hémicylindrique :



⚠ ici la normale/verticale Oz est dirigée vers le haut.

↳ $\vec{grad}P = \rho\vec{g} = -\rho g\,\vec{e_z}$

soit $dP = -\rho g\,dz$ soit $P = -\rho g z + cte$

avec $P_0 = -\rho g h + cte$

soit $P = \rho g(h-z) + P_0$

et $\vec{dF}$ force subie par la surface élémentaire du barrage :

$$\vec{dF} = \vec{dF}_{eau} + \vec{dF}_{air} = \rho g(h-z)\,dS\,\vec{n}$$

avec $\vec{n} = -\vec{e_r}$

$dS = dz\,.\,R\,d\theta$ ($d\theta > 0$ pour avoir $dS > 0$) et $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

$$\vec{dF} = dF_x\,\vec{e_x} + dF_y\,\vec{e_y} \rightarrow \vec{F} = \vec{F}_x + \cancel{\vec{F}_y}$$ par symétrie (cf schéma)

d'où $\vec{F} = F\,\vec{e_x}$ avec $$F = \vec{F}\cdot\vec{e_x} = \iint \vec{dF}\cdot\vec{e_x} = \int_{z=0}^{h}\int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \rho g(h-z)\,dz\,R\,d\theta\ \underbrace{\vec{n}\cdot\vec{e_x}}_{\cos\theta}$$

$$F = \rho g R\int_{z=0}^{h}(h-z)\,dz\int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta = -\rho g R\left|\frac{(h-z)^2}{2}\right|_0^h\cdot\left|\sin\theta\right|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = -\rho g R\,\frac{0-h^2}{2}\,2.$$

$$\rightarrow \boxed{\vec{F} = \rho g R h^2\,\vec{e_x}}$$