■ Corrigés (Bien travailler les parties cours et théoriques de ce TP-Cours)

VI.1

En différentiant les relations fondamentales pour le prisme :

$$①\rightarrow\ 0=\mathrm{d}r+\mathrm{d}r' \qquad \rightarrow\ ⑤\ \mathrm{d}r'=-\mathrm{d}r$$

$$②\rightarrow\ \mathrm{d}D=\mathrm{d}i+\mathrm{d}i'-0 \qquad \rightarrow\ ⑥\ \frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}i}=1+\frac{\mathrm{d}i'}{\mathrm{d}i}$$

$$\left.\begin{array}{l} ③\rightarrow\ \cos i\mathrm{d}i=n\cos r\mathrm{d}r \\ ④\rightarrow\ \cos i'\mathrm{d}i'=n\cos r'\mathrm{d}r' \end{array}\right\} \rightarrow\ \frac{\mathrm{d}i'}{\mathrm{d}i}=\frac{\cos i}{\cos i'}\,\frac{\cos r'\mathrm{d}r'}{\cos r\mathrm{d}r} \xrightarrow{⑤} ⑦\ \frac{\mathrm{d}i'}{\mathrm{d}i}=-\frac{\cos i}{\cos i'}\,\frac{\cos r'}{\cos r}$$

$$\xrightarrow[⑦]{⑥}\ \frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}i}=1-\frac{\cos i}{\cos i'}\,\frac{\cos r'}{\cos r}$$

Extremum (minimum) de déviation pour $i=i_m$ à λ fixée :

$$\left(\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}i}\right)_{i_m}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \cos i'.\cos r=\cos i.\cos r'$$

$$\Leftrightarrow\quad (\cos i')^2.(\cos r)^2=(\cos i)^2.(\cos r')^2$$

$$(1-\sin^2 i').(1-\sin^2 r)=(1-\sin^2 i).(1-\sin^2 r)$$

$$\xrightarrow[③]{④}\ (1-\sin^2 i').\left(1-\frac{\sin^2 i}{n^2}\right)=(1-\sin^2 i).\left(1-\frac{\sin^2 i'}{n^2}\right)$$

Après développement et factorisation : $\sin^2 i\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)=\sin^2 i'\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$

Comme $n\neq 1$, on peut simplifier par $\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$.

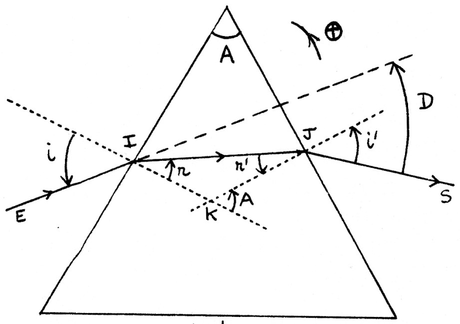
On obtient la condition : $\sin^2 i=\sin^2 i'$

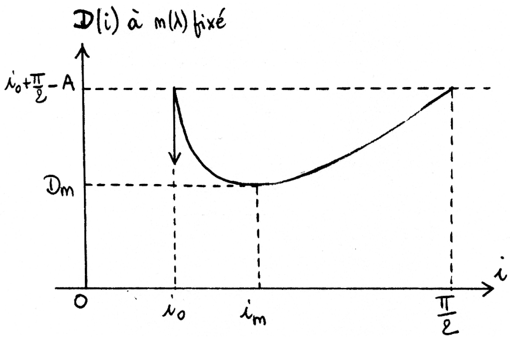
$\rightarrow$ Deux solutions :

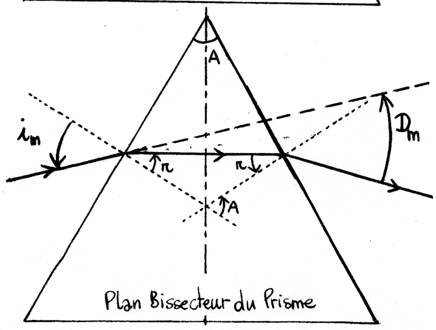
• Cas où $i_m=-i'_m$: impossible physiquement car on doit avoir $D=i+i'-A>0$

• Cas où $\boxed{i_m=i'_m}$:

$$\left.\begin{array}{l} \xrightarrow[③]{④}\ \boxed{r_m=r'_m} \\ ②\ \rightarrow\ D_m=2i_m-A \\ ①\ \rightarrow\ A=2r_m \end{array}\right\} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} i_m=\dfrac{D_m+A}{2} \\ r_m=\dfrac{A}{2} \end{array}} \xrightarrow[③]{④} \boxed{n=\dfrac{\sin\left(\dfrac{D_m+A}{2}\right)}{\sin\dfrac{A}{2}}}$$

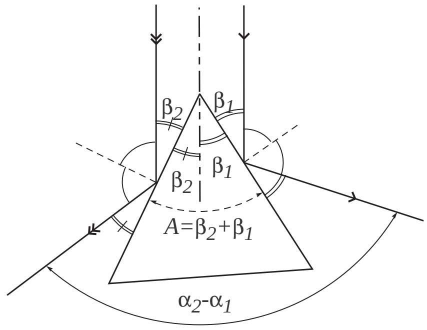






i		i_0		i_m		$\frac{\pi}{2}$
$\mathrm{d}D/\mathrm{d}i$		$-\infty$	$-$	0	$+$	1
D	PAS D'ÉMERGENCE	$i_0+\frac{\pi}{2}-A$ ↘		D_m $2i_m-A$		↗ $i_0+\frac{\pi}{2}-A$

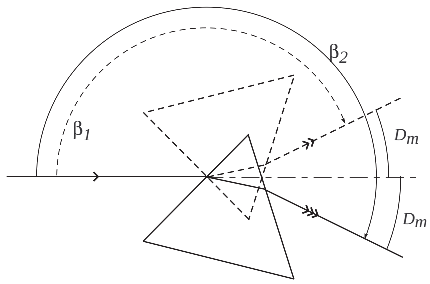
V.3 A : démonstration géométrique



• D'après la figure ci-contre, on a $A = \beta_2 + \beta_1$.
Or $\alpha_2 - \alpha_1 = 2\beta_2 + 2\beta_1$
→ Donc :

$$\boxed{A = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}}$$

VI.2.3) D_m : démonstration géométrique



• Pour exprimer D_m, « il suffit » de faire apparaître l'angle de déviation minimale pour les deux positions symétriques du prisme sur le plateau tournant sur la figure ci-contre (*Remarquer l'importance d'un schéma !*).
Alors il vient automatiquement que :

$$\boxed{D_m = \frac{\beta_2 - \beta_1}{2}}$$

Je vous rappelle la nécessité de savoir utiliser votre calculatrice personnelle pour procéder à une régression linéaire en TP, en cours mais aussi dans les prochains DS.