M1 – Méthodes

■ Erreurs à éviter

✦ La mécanique est une science vectorielle : les flèches sur les vecteurs sont obligatoires[1].
→ **Il est interdit d'identifier un vecteur à un scalaire :** « $\overrightarrow{\text{vecteur}} = \text{scalaire}$ » n'a aucun sens !
→ Des pseudo-égalités du style $\overrightarrow{F} = -k(l-l_0)$, $0 = m\overrightarrow{g} + \overrightarrow{R}$ ou $\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}} = R\omega$ sont non seulement (1) totalement incohérentes mais (2) très mal perçues au concours.

✦ Toujours commencer par faire un dessin représentant la situation ou le système à étudier.
→ Lorsque le dessin comporte des angles, éviter la plage autour de 45° de manière à ne pas faire d'erreurs de projection (ne pas confondre un sinus avec un cosinus !)
➜ Ex-M1.1

■ Comment orienter θ et $\overrightarrow{e_\theta}$ en base cylindrique ?

❏ **Méthode 1.—** θ, *par définition*, est l'angle orienté **depuis** l'axe Ox **vers** la direction Om, où m est la projection orthogonale de M sur le plan horizontal Oxy.
Le vecteur $\overrightarrow{e_\theta}$ doit indiquer le sens de déplacement du point M pour une augmentation de θ.
Dit autrement, le vecteur $\overrightarrow{e_\theta}$ est orienté **dans la direction « θ croissant ».**

➜ Ex-M1.7

■ Qu'est-ce qu'une équation horaires ? Comment en déduire la trajectoire ?

❏ **Méthode 2.—** Les **équations horaires** (ou paramétriques) d'un mouvement sont, par exemple dans le plan en coordonnées cartésiennes, les relations qui donnent $x(t)$ et $y(t)$.
La **trajectoire** du mobile s'obtient en éliminant le paramètre t, ce qui conduit à l'équation $y = f(x)$.

➜ Ex-M1.5, Ex-M1.6, Ex-M1.8, Ex-M1.9, Ex-M1.11

■ Comment obtenir les équations horaires à partir de l'accélération ?

❏ **Méthode 3.—** Les **équations horaires** s'obtiennent à partir de l'accélération dans 2 cas :
① **Cas où les composantes cartésiennes du vecteur accélération sont connues :**
- il suffit de procéder par intégrations successives pour obtenir les composantes du vecteur vitesse puis les équations horaires.
- les constantes d'intégration sont obtenues à partir des conditions initiales (sur la vitesse et sur la position)
② **cas où l'accélération est donnée par une équation différentielle :**
- il faut alors connaître la forme des solutions de l'équation différentielle ;
- là aussi, les constantes d'intégration sont obtenues à partir des conditions initiales (sur la vitesse et sur la position).

➜ Ex-M1.12, Ex-M1.13, Ex-M1.15

1. Lors d'une rédaction manuscrite. Une autre notation, typographique, consiste à écrire les vecteurs en gras ; ex : la vitesse en coordonnées cylindrique : $\mathbf{v}_{M/\mathcal{R}} = \dot{r}\mathbf{e_r} + r\dot{\theta}\mathbf{e_\theta} + \dot{z}\mathbf{e_z}$ alors que manuscritement, on écrira toujours : $\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}} = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + \dot{z}\overrightarrow{e_z}$

■ Comment résoudre l'équation horaire du mouvement rectiligne sinusoïdal ?

❏ **Méthode 4.—** L'équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants et sans second membre : $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ décrit un mouvement rectiligne sinusoïdal suivant l'axe Ox.

→ La solution générale s'écrit : $x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$

Elle est définie à 2 constantes d'intégration près $X_m > 0$ (amplitude) et $\varphi \in [0, 2\pi[$ (phase à l'origine des temps)

→ Ces 2 constantes d'intégration sont fixées par 2 conditions initiales :

$$\left\{\begin{array}{l} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} X_m = \sqrt{x_0^2 + \left(\dfrac{v_0}{\omega_0}\right)^2} & \\ \varphi = -\arctan\left(\dfrac{v_0}{x_0\omega_0}\right) & \text{si } \cos\varphi > 0 \Leftrightarrow x_0 > 0 \\ \varphi = -\arctan\left(\dfrac{v_0}{x_0\omega_0}\right) \pm \pi & \text{si } \cos\varphi < 0 \Leftrightarrow x_0 < 0 \end{array}\right.$$

→ La période des oscillations est : $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$

Démonstration : L'expression littérale de la position permet d'écrire celle de la vitesse :

$$\left\{\begin{array}{l} x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi) \\ \dot{x}(t) = -\omega_0 X_m \sin(\omega_0 t + \varphi) \end{array}\right. \Rightarrow \text{à } t = 0 \left\{\begin{array}{lll} x(0) & = x_0 & = X_m \cos\varphi \\ \dot{x}(0) & = v_0 & = -\omega_0 X_m \sin\varphi \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} X_m \cos\varphi = x_0 \\ X_m \sin\varphi = -\dfrac{v_0}{\omega_0} \end{array}\right.$$

• La tangente de la phase à l'origine des temps s'obtient en faisant le rapport membre à membre de ces équations : $\boxed{\tan\varphi = -\dfrac{v_0}{x_0\omega_0}}$

Puisque $\cos\varphi = X_m x_0$ et que $X_m > 0$, le signe de $\cos\varphi$ est celui de x_0.

$$\text{Or, lorsque} \left\{\begin{array}{llll} x_0 > 0 & \cos\varphi > 0 & \text{alors } \varphi \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[& \text{et donc } \varphi = \arctan(\tan\varphi) \\ x_0 < 0 & \cos\varphi < 0 & \text{alors } \varphi \in \left]\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right[& \text{et donc } \varphi = \arctan(\tan\varphi) \pm \pi \end{array}\right.$$

$$\text{Soit : } \boxed{\begin{array}{ll} \varphi = -\arctan\left(\dfrac{v_0}{x_0\omega_0}\right) & \text{si } \cos\varphi > 0 \Leftrightarrow x_0 > 0 \\ \varphi = -\arctan\left(\dfrac{v_0}{x_0\omega_0}\right) \pm \pi & \text{si } \cos\varphi < 0 \Leftrightarrow x_0 < 0 \end{array}}$$

• Comme $(X_m \cos\varphi)^2 + (X_m \sin\varphi)^2 = X_m^2$, on obtient : $\boxed{X_m = \sqrt{x_0^2 + \left(\dfrac{v_0}{\omega_0}\right)^2}}$

➜ **Ex-M1.10**