M5 – OSCILLATEUR HARMONIQUE EN RÉGIME FORCÉ

Rappels des épisodes précédents...

• Au cours de la première période, nous avons rencontré le modèle de l'Oscillateur Harmonique Amorti (➜ Cf Cours **M4**).
Nous allons poursuivre l'étude de l'OHA en supposant que son **régime est forcé** (l'OHA n'est plus en régime libre).
Ce modèle est très intéressant car il permet de traiter une grande variété de phénomènes de même types, mais de natures physiques très différentes. Il peut s'agir de systèmes mécaniques soumis à des contraintes extérieures (ressort relié à un vibreur, p.ex.), des atomes ou des molécules excités par des ondes lumineuses, ou encore certains réseaux électriques soumis à des excitations (dipôle RLC série p.ex.).

• Nous allons donc nous intéresser à la réponse d'un oscillateur en nous limitant à une excitation sinusoïdale. Nous avons déjà vu (➜ Cf Cours **E4** et **E5**) tout l'intérêt de l'étude du **régime forcé sinusoïdal** :
→ en effet, grâce à l'analyse de FOURIER, tout régime périodique forcé peut être considéré comme la combinaison linéaire de plusieurs régimes sinusoïdaux indépendants.

• Nous allons retrouver le phénomène de **filtrage**, c'est-à-dire la dépendance de l'amplitude de la réponse à la fréquence de l'excitation. (➜ Cf Cours **E5**.)

• Par analogie avec le cours d'électrocinétique, l'OHA en régime forcé sinusoïdal apparaît comme un **filtre linéaire d'ordre deux**.
Du coup, pour un type d'excitation donnée, et selon la grandeur considérée comme réponse, l'OHA en régime forcé sinusoïdal peut (ou ne peut pas) présenter un **phénomène de résonance**.
Lorsqu'une résonance est susceptible de se produire, suivant qu'elle accentue un défaut (réponse d'un amortisseur de voiture ; ➜ Cf **DL7**) ou une qualité du système (réponse d'un sismographe ; ➜ Cf **Ex-M5.1**), elle sera dans la pratique évitée ou au contraire recherchée.

• En conclusion, nous établirons toutes les analogies possibles entre un problème mécanique et un problème électrique relevant tout deux du modèle de l'O.H.A.

I Exemple d'O.H.A. en régime forcé

➜ Cf Cours.

II Réponse de l'oscillateur à une excitation sinusoïdale

• On cherche à déterminer l'évolution du mouvement d'un oscillateur lorsqu'il est soumis à une force extérieure connue. Cela revient à étudier les solutions d'équations différentielles de la forme :

$$m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = F(t).$$

• De la même façon, on a étudié dans la **leçon E5**, l'évolution de la charge du condensateur d'un circuit RLC série soumis à une tension 'extérieure' $U(t)$.

L'équation alors obtenue était de la forme : $L\ddot{q} + R\dot{q} + \dfrac{q}{C} = U(t)$.

• Donc, en général, étudier des oscillations forcées revient à étudier les solutions des équations différentielles :

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\,\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{m} \qquad (E_{OHF})}$$

$F(t)$ représente **l'excitation** et les solutions de (E_{OHF}) sont la **réponse à l'excitation**.
Le système physique qui exerce $F(t)$ est un **excitateur**, et l'oscillateur soumis à l'excitation est appelé **résonateur**.
• Comme chaque excitation $F(t)$ peut se décomposer en une somme de fonctions sinusoïdales (série ou transformée de FOURIER),on se contentera d'étudier le **cas des excitations sinusoïdales** :
$\boxed{F(t) = F_0 \cos \omega t}$
On peut introduire $e(t)$ telle que :

$$\omega_0^2 e(t) \equiv \frac{F(t)}{m}, \text{ soit : } \quad e(t) = \frac{F_0}{\omega_0^2 m} \cos(\omega t) \equiv A \cos(\omega t)\,; \text{ en posant : } \boxed{A = \frac{F_0}{\omega_0^2 m}}$$

Alors, (E_{OHF}) devient : $\boxed{\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\,\dot{x} + \omega_0^2 x(t) = \omega_0^2 e(t) \qquad (E_{OHF})}$

L'expérience montre que la réponse suit un *régime transitoire* après établissement de l'excitation.
Ce régime transitoire disparaît au bout d'une durée de l'ordre de la constante de temps caractéristique τ observée lors de l'étude de l'oscillateur amorti libre (➜ Cf Cours **M4**).
Il laisse ensuite place à un *régime forcé* obtenu en cherchant la *solution particulière avec second membre* de (E_{OHF}).
Dans le cas d'une excitation sinusoïdale, la réponse forcée est sinusoïdale de *même* pulsation.

→ En régime sinusoïdal forcé, on utilise la **représentation complexe** :
Pour une grandeur réelle $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$,[a] on associe la représentation complexe :

Notations :

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi) \;\Rightarrow\; \underline{x}(t) = X_m \exp[j(\omega t + \varphi)] = X_m e^{j\varphi}.e^{j\omega t} = \underline{X}.e^{j\omega t}$$

$\boxed{x(t) = \mathcal{R}e(\underline{x})}$ et $\boxed{\underline{X} = X_m.e^{j\varphi}}$ (**amplitude complexe de** x)

On a donc : $\boxed{X_m = \mid \underline{X} \mid}$ et $\boxed{\varphi = \arg(\underline{X})}$

Correspondances : $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \leftrightarrow j\omega$ et $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}^2} \leftrightarrow -\omega^2$

III Détermination de la solution forcée

• On cherche donc à résoudre l'équation différentielle : $\ddot{x} + \dfrac{\omega_0}{Q}\,\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 A \cos \omega t$.

En représentation complexe, on a :

$$-\omega^2 \underline{x} + j\omega \frac{\omega_0}{Q} \underline{x} + \omega_0^2 \underline{x} = \omega_0^2 A.e^{j\omega t}$$

Soit après simplification par $e^{j\omega t}$: $\underline{X}\left(\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega\dfrac{\omega_0}{Q}\right) = A\omega_0^2$

a. avec φ *a priori* compris entre $-\pi$ et π.

$\rightarrow$ $\boxed{\underline{X} = \dfrac{A}{1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2} + 1\dfrac{1}{Q}\dfrac{\omega}{\omega_0}}}$ avec : $\underline{X} = X_m.e^{j\varphi}$ et donc : $X_m = \mid \underline{X} \mid$ et $\varphi = \text{arg}\,(\underline{X})$

• On obtient : $\boxed{X_m = \dfrac{A}{\sqrt{\left(1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \dfrac{1}{Q^2}\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}}}}$ et $\boxed{\varphi = -\text{arg}\left(1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\dfrac{1}{Q}\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)}$

Rq1 : On a donc :

$$\cos\varphi = \frac{1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}}{\sqrt{\left(1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \dfrac{1}{Q^2}\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}}} \quad \text{et} \quad \sin\varphi = \frac{-\dfrac{1}{Q}\dfrac{\omega}{\omega_0}}{\sqrt{\left(1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \dfrac{1}{Q^2}\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}}} \leq 0$$

$\rightarrow$ **Propriété :** $\cos\varphi$ est donc du signe de $(\omega_0^2 - \omega^2)$.

Rq2 : On obtient ainsi $\sin\varphi \leq 0$ $\rightarrow$ Soit : $\boxed{-\pi \leq \varphi \leq 0}$

▮ Propriété : Ceci signifie tout simplement que **la réponse** 'x' de l'oscillateur est **en retard de phase par rapport au résonateur** $e(t)$.

Certains auteurs préfèrent définir x sous la forme $x = X_m \cos(\omega t - \varphi)$: alors $\underline{X} = X_m e^{-j\varphi}$ et ainsi $\varphi \geq 0$.
Dans les deux cas, on obtient des résultats équivalents bien entendu.

Rq3 : On pourrait, comme en électricité, introduire la pulsation réduite x telle que $x \equiv \dfrac{\omega}{\omega_0}$; mais, pour qu'il n'y ait pas de confusion avec l'écart à l'équilibre'x' (X, θ,...), grandeur physique associée au mouvement de l'oscillateur, on s'en gardera !!

IV Étude de l'amplitude - résonance d'élongation

• Étude déjà menée en **E4**.IV.5 : résonance en tension (aux bornes du condensateur d'un circuit RLC série).

• $X_m = \dfrac{A}{\sqrt{f(U)}}$ est maximal lorsque $f(U) = (1 - U)^2 + \dfrac{1}{Q^2}U$ est minimale avec $U \equiv \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}$.

On a $f'(U) = -2(1 - U) + \dfrac{1}{Q^2} = 0$ lorsque $U = \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2} = 1 - \dfrac{1}{2Q^2}$.

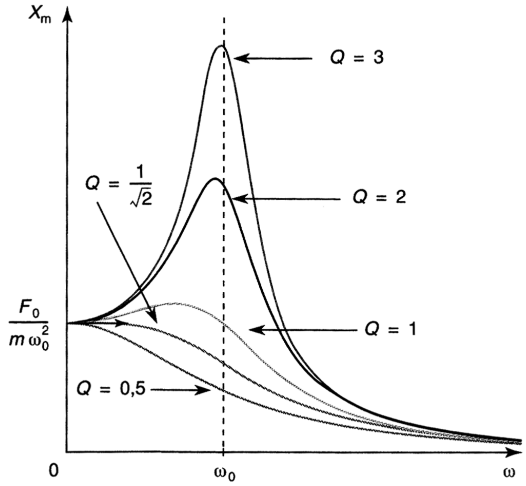
Comme $U = 1 - \dfrac{1}{2Q^2} = \dfrac{\omega_r^2}{\omega_0^2} > 0$, ceci impose d'avoir : $\boxed{Q > \dfrac{1}{\sqrt{2}}}$.

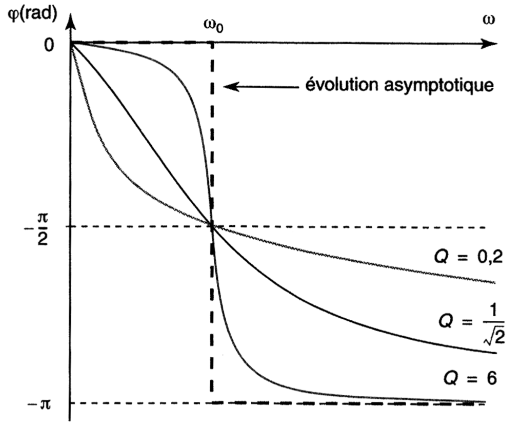
Lorsque $Q > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, la valeur maximale de X_m atteinte est :

$$X_m(\text{max}) = \frac{A}{\sqrt{\left(1 - 1 + \dfrac{1}{2Q^2}\right)^2 + \dfrac{1}{Q^2}\left(1 - \dfrac{1}{2Q^2}\right)}} \Rightarrow \boxed{X_m(\text{max}) = \frac{AQ}{\sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}}}}$$

$\rightarrow$ On parle de **résonance d'élongation** pour une pulsation de résonance :

$$\boxed{\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} < \omega_0}$$





• Toujours lorsque $Q > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, on peut définir une **bande passante** $[\omega_1,\ \omega_2]$ correspondant à l'intervalle des valeurs de ω telles que : $\forall \omega \in [\omega_1;\omega_2] \quad X_m \geq \dfrac{X_m(\mathsf{max})}{\sqrt{2}}$

Hyp : envisageons un faible amortissement ($Q \gg 1$) pour évaluer la bande-passante.
$Q \gg 1 \rightarrow X_m(\mathsf{max}) \cong AQ = \dfrac{A}{\sqrt{\dfrac{1}{Q^2}}}$. En ω_1 ou ω_2 on a donc : $(1-U)^2 + \dfrac{1}{Q^2}U = \dfrac{2}{Q^2}$.

Soit : $U^2 - 2U\left(1 - \dfrac{1}{2Q^2}\right) + 1 - \dfrac{2}{Q^2} = 0$

trinôme de discriminant réduit : $\Delta' = b'^2 - ac = \dfrac{1}{Q^2}\left(1 + \dfrac{1}{4Q^2}\right)$

$U_{2/1} = 1 - \dfrac{1}{2Q^2} \pm \dfrac{1}{Q}\sqrt{1 + \dfrac{1}{4Q^2}} \cong 1 \pm \dfrac{1}{Q}$ (DL$_1$ en $\dfrac{1}{Q}$). On a alors : $\dfrac{\omega_{2/1}}{\omega_0} = \sqrt{U_{2/1}} \cong 1 \pm \dfrac{1}{2Q}$

$\rightarrow \boxed{\dfrac{\Delta\omega}{\omega_0} \cong \dfrac{1}{Q}}$ lorsque $Q \gg 1$; avec $\Delta\omega \equiv \omega_2 - \omega_1$

Dans le cas de l'oscillateur faiblement amorti, l'acuité à la résonance est la facteur de qualité : $\dfrac{\omega_0}{\Delta\omega} \simeq Q$.
Une résonance aigüe correspond à un facteur de qualité élevé.
Le filtre passe-bande est d'autant plus sélectif autour de la pulsation propre ω_0 que le facteur de qualité est grand et que l' amortissement est faible.

• **Les SIGNES** de $\sin\varphi$ et de $\cos\varphi$ montrent que :
- pour $\omega < \omega_0$ on a : $\varphi \in [0, -\pi/2]$;
- et pour $\omega \geq \omega_0$, on a : $\varphi \in [-\pi/2, -\pi]$.

$\rightarrow$ ce qui montre que **l'« élongation »x est toujours en retard de phase sur l'excitation F**.

Comportement asymptotique :
- pour $\omega \gg \omega_0$: $\cos\varphi \rightarrow -1$ d'où : $\varphi \rightarrow -\pi$;
- pour $\omega \ll \omega_0$: $\cos\varphi \rightarrow 1$ donc : $\varphi \rightarrow 0$;
- et $\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$ pour $\omega = \omega_0$.

Interprétation des courbes de déphasage :
- Pour les faibles fréquances d'excitation, l'oscillateur est est en phase avec la l'excitation : il suit le mouvement de l'excitateur.
- Pour les hautes fréquences, le mouvement et la force excitatrice sont en opposition de phase.

- À la pulsation propre, l'excitation et l'élongation sont en quadrature.
- Plus le facteur de qualité est élevé et plus φ varie rapidement autour de la pulsation propre ω_0 des oscillations libres non amorties de l'oscillateur.

V Étude de la vitesse - résonance de vitesse

• On obtient la vitesse [b] par dérivation de x. De $x = X_m \cos(\omega t + \varphi)$, on en déduit :

$$\dot{x} = -\omega . X_m . \sin(\omega t + \varphi) = \omega X_m \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) = V_m \cos(\omega t + \psi)$$

D'où $\boxed{v = \dot{x} = V_m \cos(\omega t + \psi)}$ avec : $\boxed{V_m = \omega X_m}$ et $\boxed{\psi = \varphi + \frac{\pi}{2}}$

• En reprenant l'expression de X_m, on en déduit : $V_m = \dfrac{A\omega}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{1}{Q^2}\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}$

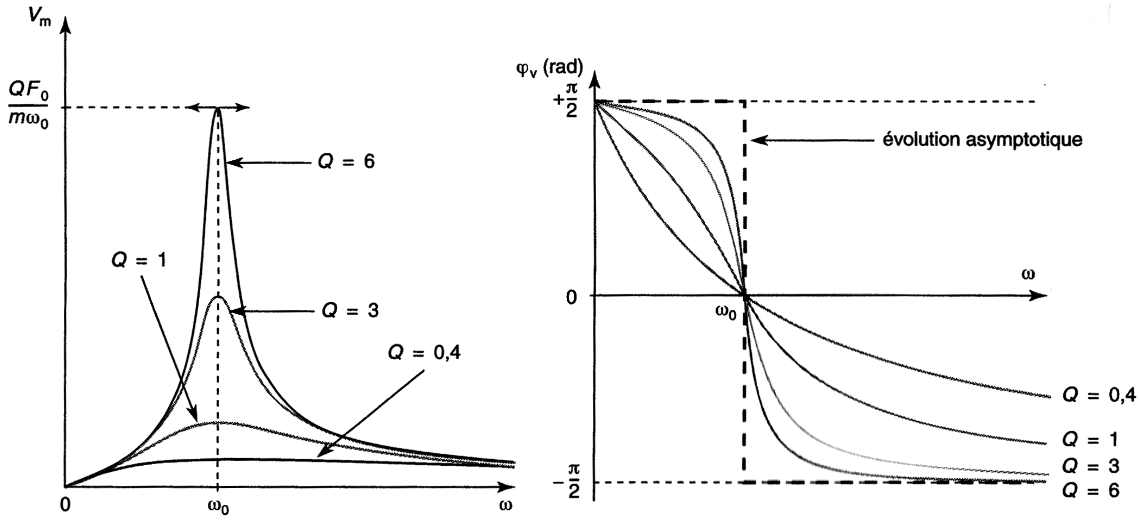
soit encore, en multipliant numérateur et dénominateur par $Q\dfrac{\omega_0}{\omega}$:

$$V_m = \frac{A Q\frac{\omega_0}{\cancel{\omega}}\cancel{\omega}}{Q\frac{\omega_0}{\omega}\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{1}{Q^2}\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_m = \frac{A\omega_0 Q}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}}$$

• L'étude de V_m a déjà été menée en ➜ **E4**.IV.4) Réponse en intensité ; résonance en intensité

$\rightarrow$ V_m passe par un maximum lorsque $1 + Q^2\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2$ passe par un minimum, c'est-à-dire lorsque $\omega = \omega_0$.

❚ Propriété :
La **résonance en vitesse** a lieu pour $\omega_r = \omega_0$ et <u>elle est obtenue *quelque soit* Q !</u>



• La valeur extremale de V_m est : $V_m(\text{max}) = A\omega_0 Q$ soit encore : $\boxed{V_m(\text{max}) = \dfrac{F_0 Q}{m\omega_0}}$

La **bande passante** est obtenue pour ω telle que

$$\forall \omega \in [\omega_1 ; \omega_2] \quad V_m \geq \frac{V_m(max)}{\sqrt{2}}$$

Cette définition (en posant $V = \frac{\omega}{\omega_0}$) conduit à :

$1 + Q^2\left(V - \dfrac{1}{V}\right)^2 = 2 \;\Leftrightarrow\; V^2 \pm \dfrac{V}{Q} - 1 = 0$ double plynôme de disciminant : $\Delta = \dfrac{1}{Q^2} + 4$

b. il s'agit de la vitesse de la variable 'x', écart à l'équilibre.

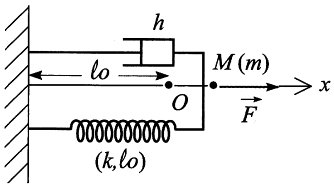
→ Les racines positives (les seules physiquement acceptables) sont :

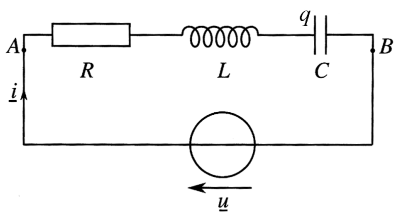
$$V_{2/1} = \pm\frac{1}{2Q} + \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} \qquad \text{soit :} \qquad \omega_{2/1} = \pm\frac{\omega_0}{2Q} + \omega_0\sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}}.$$

→ La bande passante est alors donnée par : $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ → d'où : $\boxed{\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q}}$ (ici, égalité rigoureuse).

VI Analogie électro-mécanique

- Pour un oscillateur mécanique amorti en régime forcé :
$m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = F(t)$ (PDF)
- Pour un circuit RLC série
$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = U(t)$
(L.Mailles)





- On peut poursuivre l'analogie établie entre la grandeur x de l'oscillateur et la charge q du condensateur d'un circuit RLC série :

q	$i = \frac{dq}{dt}$	U	L	R	$\frac{1}{C}$	$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$	$Q = \frac{L\omega_0}{R}$	$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}$	$\mathcal{P}_d = Ri^2$

VII Étude énergétique - résonance en puissance dissipée

- ➜ Cf Cours.
- L'étude des analogies met en évidence la puissance dissipée par les forces de frottements :

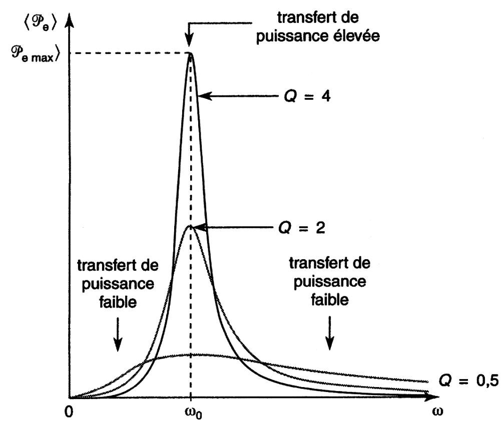
$$\mathcal{P}_{\text{dissipée}} = -\mathcal{P}_f = h\dot{x}^2 = h\omega^2 X_m^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

Et la puissance moyenne dissipée vaut :

$$<\mathcal{P}_{\text{diss}}> = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \mathcal{P}_{\text{diss}}.\text{d}t = h\omega^2 X_m^2 \underbrace{<\sin^2(\omega t + \varphi)>_T}_{\frac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{<\mathcal{P}_{\text{diss}}> = \frac{1}{2}hV_m^2 = \frac{1}{2}h\omega^2 X_m^2}$$

Propriété : Comme pour V_m, on observe un maximum de $<\mathcal{P}_{\text{diss}}>$ en ω_0 ; on parle de **résonance en puissance**.

Rq :
La résonance en puissance a aussi lieu quelque soit la valeur de Q.



Rq : puisque $<\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}t}>=<\mathcal{P}_e>+<\mathcal{P}_f>=0$, on en déduit que la puissance moyenne dissipée n'est rien d'autre que la puissance moyenne fournie par l'excitateur (force $\overrightarrow{F}$) à l'oscillateur.

• Dans le cas de la résonance en puissance, la *bande passante* est définie de façon différente par rapport à la résonance en vitesse ou en élongation.
La bande passante en puissance est l'intervalle de pulsations ω pour lesquelles

$$\forall\omega\in[\omega_1;\omega_2]\qquad <\mathcal{P}_{\text{diss}}>\geq\frac{<\mathcal{P}_{\text{diss}}>_{\text{max}}}{2}$$

→ Un calcul similaire à celui fait pour la résonance de vitesse donne, avec ce choix, la *même bande passante* $[\omega_1,\,\omega_2]$ et donc :

$$\boxed{\frac{\Delta\omega}{\omega_0}=\frac{1}{Q}}$$

• Pour un oscillateur avec $Q\gg1$ fonctionnant près de la pulsation propre $\omega\simeq\omega_0$, l'énergie dissipée par période vaut :

$$<\mathcal{P}_{\text{diss}}>=\frac{\mathcal{E}_{\text{diss}}}{T}\quad\Rightarrow\quad\mathcal{E}_{\text{diss}}=T.<\mathcal{P}_{\text{diss}}>=\frac{\cancel{2}\pi}{\omega}.\frac{1}{\cancel{2}}hV_m^2\simeq\frac{\pi}{\cancel{\omega_0}}.h.A^2\omega_0^{\cancel{2}}Q^2$$

Soit : $\boxed{\mathcal{E}_{\text{diss}}\cong\pi h\omega_0A^2Q^2}$

• Par ailleurs, si l'énergie mécanique ne se conserve pas, on, a toujours, en moyenne sur une période pour ω proche de ω_0 et $Q\gg1$:

$$\begin{aligned}<\mathcal{E}_m>=<\mathcal{E}_k>+<\mathcal{E}_p>&=\frac{1}{4}m\omega^2X_m^2+\frac{1}{4}kX_m^2\\&\simeq\left(\frac{1}{4}\underbrace{m\omega_0^2}_{k}+\frac{1}{4}k\right).X_m^2\\&\simeq\frac{1}{2}k.A^2Q^2\qquad\text{puisque}\ \begin{cases}X_m\simeq X_m(\text{max})\ \text{pour}\ \omega\simeq\omega_0\\X_m(\text{max})\simeq AQ\ \text{pour}\ Q\gg1\end{cases}\end{aligned}$$

On a donc : $\boxed{<\mathcal{E}_m>\simeq\frac{1}{2}kA^2Q^2}$

• On en déduit la relation :

$$\frac{\mathcal{E}_{\text{diss}}}{<\mathcal{E}_m>}=\frac{\pi h\omega_0\cancel{A^2}\cancel{Q^2}}{\frac{1}{2}\cancel{A^2}\cancel{Q^2}}=\frac{2\pi}{\frac{k}{h\omega_0}}\quad\text{avec}\quad\frac{k}{h\omega_0}=\frac{k\omega_0}{h\omega_0^2}=\frac{\cancel{k}\omega_0}{h\frac{\cancel{k}}{m}}=\frac{m\omega_0}{h}=\tau\omega_0=Q$$

$\boxed{\frac{\mathcal{E}_{\text{diss}}}{<\mathcal{E}_m>}\cong\frac{2\pi}{Q}}$ qui rappelle que $Q\gg1$ correspond à $\mathcal{E}_{\text{diss}}\ll\mathcal{E}_m$.

→ un oscillateur (destiné à osciller le plus longtemps possible par définition !) est de « bonne qualité » si son facteur de qualité est élevé ; car alors, il dissipe (= perd) à chaque période une énergie faible ($\mathcal{E}_{diss}$) par rapport à celle qu'il contient ($\mathcal{E}_m$)
→ d'où le nom de « facteur de qualité » pour Q.