# Leçon E5 – Méthodes

**Rq :** À priori les constantes $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $a$, $b$ et $c$ sont des complexes ; de même pour $\underline{H}_0$.

## ■ Quelle est la fonction de transfert canonique d'un filtre d'ordre 1 ?

◇ **Définition :** La fonction de transfert d'un filtre d'ordre 1 peut se mettre sous l'une des deux **formes canoniques** suivantes :

| Filtre Passe-Bas | Filtre Passe-Haut |
|---|---|
| ↓ | ↓ |
| $\underline{H}(jx) = \dfrac{\underline{H}_0}{1+jx}$ | $\underline{H}(jx) = \dfrac{\underline{H}_0.jx}{1+jx}$ |

avec $\begin{cases} x = \dfrac{\omega}{\omega_0} = \dfrac{f}{f_0} \\ \omega \text{ la pulsation propre} \\ f \text{ la fréquence propre} \end{cases}$

## ■ Comment reconnaître la nature d'un filtre d'ordre 1 ?

❏ **Méthode 1.—** Il faut écrire la **fonction de transfert « spécifique »** (au filtre qu'on est en train d'étudier) sous la forme :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{N}(j\omega)}{a+b.j\omega}$$

**si** $\underline{N}(j\omega) = \alpha$ : il s'agit d'un filtre passe-bas

**si** $\underline{N}(j\omega) = \beta.j\omega$ : il s'agit d'un filtre passe-haut

## ■ Comment exprimer la fréquence propre d'un filtre d'ordre 1 ?

❏ **Méthode 2.—** Il faut comparer la fonction de transfert « spécifique » $\underline{H}$ à la forme canonique à laquelle elle appartient en écrivant $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{\underline{N}(j\omega)}{a+b.j\omega}$ sous la forme :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{N}'(j\omega)}{\boxed{1} + \boxed{\frac{b}{a}j\omega}} \longleftrightarrow \underline{H}(jx) = \frac{\underline{N}_0(jx)}{\boxed{1} + \boxed{jx}} \quad \text{avec } \underline{N}_0(jx) = \begin{cases} \underline{H}_0 \\ \text{ou} \\ \underline{H}_0.jx \end{cases}$$

$$\text{Alors} \begin{cases} 1 \longleftrightarrow 1 \\ \dfrac{b}{a}j\omega \longleftrightarrow jx \longrightarrow x \equiv \dfrac{\omega}{\omega_0} = \dfrac{b}{a}\omega \Leftrightarrow \boxed{\omega_0 = \dfrac{a}{b}} \\ \underline{N}'(j\omega) = \dfrac{\underline{N}}{a} \longleftrightarrow \underline{N}_0(jx) \longrightarrow \underline{N}' = \underline{N}_0 \Rightarrow \boxed{\underline{H}_0} \end{cases}$$

## ■ Comment reconnaître la nature d'un filtre d'ordre 2 ?

❏ **Méthode 3.—** Il faut écrire la fonction de transfert sous la forme :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{N}(j\omega)}{a+b.j\omega+c.(j\omega)^2}$$

**si** $\underline{N}(j\omega) = \alpha$ : filtre passe-bas

**si** $\underline{N}(j\omega) = \beta.j\omega$ : filtre passe-bande

**si** $\underline{N}(j\omega) = \gamma.(j\omega)^2$ : filtre passe-haut

**si** $\underline{N}(j\omega) = \alpha + \gamma.(j\omega)^2$ : coupe-bande

## ■ Quelle est la fonction de transfert canonique d'un filtre d'ordre 2 ?

◇ **Définition :** La fonction de transfert d'un filtre d'ordre 2 classique peut se mettre sous l'une des quatre **formes canoniques** suivantes :

| | | | |
|---|---|---|---|
| Passe-Bas | $\underline{H}(jx) = \dfrac{H_0}{1+\dfrac{jx}{Q}+(jx)^2}$ | $\underline{H}(jx) = \dfrac{H_0.\dfrac{jx}{Q}}{1+\dfrac{jx}{Q}+(jx)^2}$ | Passe-Bande |
| Passe-Haut | $\underline{H}(jx) = \dfrac{H_0.(jx)^2}{1+\dfrac{jx}{Q}+(jx)^2}$ | $\underline{H}(jx) = \dfrac{H_0.(1+(jx)^2)}{1+\dfrac{jx}{Q}+(jx)^2}$ | Coupe-Bande |

## ■ Comment exprimer la fréquence propre d'un filtre d'ordre 2 ?

❏ **Méthode 4.—** Il faut comparer la fonction de transfert « spécifique » $\underline{H}$ à la forme canonique à laquelle elle appartient en écrivant $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{\underline{N}(j\omega)}{a+b.j\omega+c(j\omega)^2}$ sous la forme :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{N}'(j\omega)}{\boxed{1}+\boxed{\dfrac{b}{a}j\omega}+\boxed{\dfrac{c}{a}(j\omega)^2}} \longleftrightarrow \underline{H}(jx) = \frac{\underline{N}_0(jx)}{\boxed{1}+\boxed{\dfrac{jx}{Q}}+\boxed{(jx)^2}}$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{lllll} 1 & \longleftrightarrow & 1 & & \\ \dfrac{c}{a}(j\omega)^2 & \longleftrightarrow & (jx)^2 & \longrightarrow x^2 \equiv \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2} = \dfrac{c}{a}\omega^2 & \Leftrightarrow \boxed{\omega_0 = \sqrt{\dfrac{a}{c}}} \\ \dfrac{b}{a}j\omega & \longleftrightarrow & \dfrac{jx}{Q} & \longrightarrow \dfrac{x}{Q} \equiv \dfrac{b}{a}\omega & \Leftrightarrow \boxed{Q = \dfrac{a}{b\omega_0} = \dfrac{c\omega_0}{b}} \\ \underline{N}'(j\omega) = \dfrac{\underline{N}}{a} & \longleftrightarrow & \underline{N}_0(jx) & \longrightarrow \underline{N}' = \underline{N}_0 & \Rightarrow \boxed{\underline{H}_0} \end{array}\right.$$

## ■ Quelle est la forme la plus pratique de $\underline{H}$ pour un filtre passe-bande d'ordre 2 ?

❏ **Méthode 5.—** Pour un filtre passe-bande d'ordre 2, la fonction de transfert canonique peut s'écrire sous une seconde forme, plus pratique pour exprimer $H$, $G_{\text{dB}}$ et $\varphi$ :

$$\underline{H}(jx) = \frac{H_0.\dfrac{jx}{Q}}{1+\dfrac{jx}{Q}+(jx)^2} \xrightarrow[\text{par } \frac{jx}{Q}]{\text{en factorisant}} \boxed{\underline{H} = \frac{\underline{H}_0}{1+jQ\left(x-\dfrac{1}{x}\right)}}$$

$$\boxed{H = |\,\underline{H}\,| = \frac{|\,\underline{H}_0\,|}{\sqrt{1+Q^2\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2}}}$$

$$\boxed{\varphi = \arg \underline{H} = \arg \underline{H}_0 - \arctan\left[Q\left(x-\frac{1}{x}\right)\right]}$$

$$G_{\text{dB}} = 20\log \underline{H} = 20\log |\,\underline{H}_0\,| - 10\log\left[1+Q^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2\right]$$