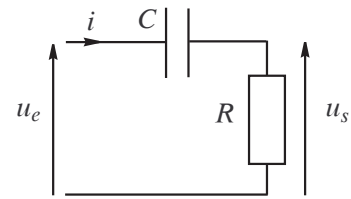


## II Filtre d'ordre 1

## II.2 Filtres passe-haut d'ordre 1

### a Exemple et étude asymptotique :

- À Basses Fréquences (ABF) le condensateur est un coupe-circuit, donc  $i \cong 0$  et  $u_s = u_R = 0$ .
  - À Hautes Fréquences (AHF), le condensateur se comporte comme un fil, donc  $u_s \cong u_e$ .
- Ce circuit est bien un **filtre passe-haut**.



### b Fonction de transfert :

- $\underline{H}(j\omega) = \frac{U_s}{U_e} = \frac{R}{R + \frac{1}{jC\omega}}$  (par application du Diviseur de tension) →  $\underline{H}(j\omega) = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega}$

- On peut introduire le temps caractéristique  $\tau \equiv RC$ , et écrire :  $\underline{H}(j\omega) = \frac{j\tau\omega}{1 + j\tau\omega}$

Ou mieux, poser la **pulsation propre**  $\omega_0 \equiv \frac{1}{\tau} = \frac{1}{RC}$  et, la **fréquence réduite**  $x \equiv \frac{f}{f_0} = \frac{\omega}{\omega_0}$ .

Alors :  $\underline{H}(j\omega) = \frac{jx}{1 + jx}$

### c Diagramme de Bode :

#### a) Réponse en gain :

↔ Comportement asymptotique en BF et en HF, sachant que  $G_{dB} \equiv 20 \log |\underline{H}| = 20 \log \left( \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right)$  :

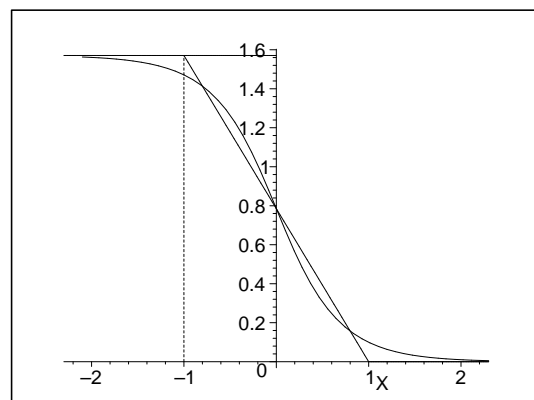
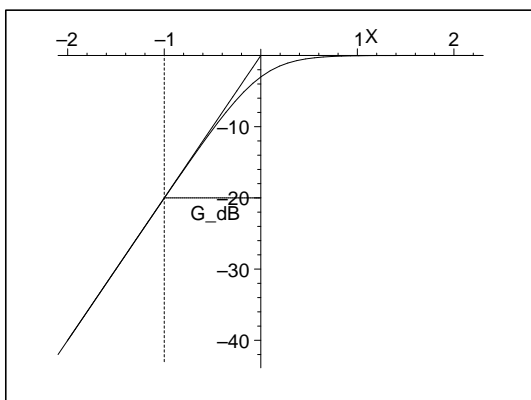
- pour  $x \ll 1$  ( $\omega \ll \omega_0$ ) :  $G_{dB} \rightarrow G_{dB}(\text{ABF}) = 20 \log(x)$   
 ⇒ asymptote à  $+20 \text{ dB/déc}$  passant par  $(0, 0)$ .
- pour  $x = 1$  ( $\omega = \omega_0$ ) :  $G_{dB} = -20 \log(\sqrt{2}) = -3 \text{ dB}$ .
- pour  $x \gg 1$  ( $\omega \gg \omega_0$ ) :  $G_{dB} \rightarrow G_{dB}(\text{AHF}) = 0$   
 ⇒ asymptote horizontale passant par  $(0, 0)$ .

**CI :** Les pulsations supérieures à la pulsation  $\omega_0$  ( $x > 1$ ) sont transmises avec une atténuation inférieure à  $3 \text{ dB}$ , alors que les pulsations inférieures à  $\omega_0$  ( $x < 1$ ) sont atténuées de  $20 \text{ dB/déc}$ .

→ Ce filtre est un passe-haut d'ordre 1, de pulsation de coupure  $\omega_0$  et dont la bande passante à  $-3 \text{ dB}$  est  $[\omega_0, +\infty[$ .

#### b) Réponse en phase :

- $\phi = \varphi_s - \varphi_e = \arg(\underline{H}) = \arg(jx) - \arg(1 + jx) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$
- pour  $x \ll 1$  ( $\omega \ll \omega_0$ ) :  $\phi \rightarrow \phi(\text{BF}) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$  asymptote à  $\frac{\pi}{2}$
- pour  $x = 1$  ( $\omega = \omega_0$ ) :  $\phi = \frac{\pi}{4}$
- pour  $x \gg 1$  ( $\omega \gg \omega_0$ ) :  $\phi \rightarrow \phi(\text{HF}) = 0 \Rightarrow$  asymptote horizontale.



Réponse en gain et en phase avec diagrammes asymptotiques pour un passe-haut d'ordre 1

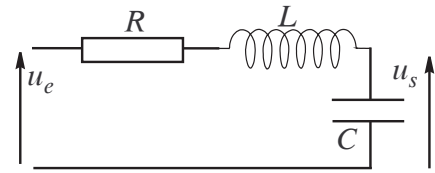
## III Filtres d'ordre 2

### III.2 Filtres passe-bas d'ordre 2

#### a Exemple et étude asymptotique :

- À Basses Fréquences (BF) la bobine est un fil et le condensateur est un coupe-circuit, donc  $i \cong 0$  et  $u_s = u_e$ .
- À Hautes Fréquences (HF), la bobine est un fil (donc  $i \cong 0$ ) et le condensateur se comporte comme un fil, donc  $u_s \cong 0$ .

→ Ce circuit est bien un **filtre passe-bas**.



#### b Fonction de transfert :

- $\underline{H}(j\omega) = \frac{U_s}{U_e} = \frac{1}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}}$  (Diviseur de tension)  $\rightarrow \underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega + LC(j\omega)^2}$ .

- On peut introduire la **pulsation propre** ( $\omega_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ) et le **facteur de qualité** ( $Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$ )

d'un circuit (RLC) série; alors :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{x}{Q} + (jx)^2}$$

#### c Diagramme de Bode :

α) Réponse en gain : • Comportement asymptotique en BF et en HF, sachant que

$$G_{dB} \equiv 20 \log |\underline{H}| = 20 \log \left( \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}} \right) = -10 \log \left( (1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2} \right)$$

- pour  $x \ll 1$  ( $\omega \ll \omega_0$ ) :  $G_{dB} \rightarrow G_{dB}(\text{ABF}) = -10 \log(1) = 0$   
 $\Rightarrow$  asymptote horizontale à 0 dB.
- pour  $x = 1$  ( $\omega = \omega_0$ ) :  $G_{dB} = 20 \log(Q)$ .
- pour  $x \gg 1$  ( $\omega \gg \omega_0$ ) :  $G_{dB} \rightarrow G_{dB}(\text{AHF}) = -40 \log(x)$   
 $\Rightarrow$  asymptote à -40 dB/déc.

**CI :** Les pulsations très supérieures à la pulsation  $\omega_0$  ( $x > 1$ ) sont atténuées de -40 dB/déc, alors que les pulsations très inférieures à  $\omega_0$  ( $x < 1$ ) sont transmises avec une atténuation inférieure à -3 dB.

- Par contre, le facteur de qualité influe sur le comportement de la courbe au voisinage de  $\omega = \omega_0$ ; l'écart entre la courbe et le diagramme asymptotique pouvant devenir très important pour les grandes valeurs de  $Q$ . → Étudions cette zone « sensible »...

- Le gain présente un *maximum* lorsque  $f(x) = (1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}$  passe par un minimum.

La dérivée de cette fonction  $f(x)$  est :  $\frac{df}{dx} = 2x \left( 2x^2 - 2 + \frac{1}{Q^2} \right)$ . Cette dérivée s'annule pour :

-  $x = 0$ , ce qui correspond au régime continu et n'a ici aucun intérêt (puisque nous étudions un régime sinusoïdal),

-  $x_r = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} = \frac{\omega_r}{\omega_0}$ , ce qui correspond à la pulsation de résonance en tension aux bornes du condensateur (improprement parfois appelée « surtension » aux bornes de  $C$ ) :

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \quad \text{Cette résonance } (G_{dB} > 0 \Leftrightarrow H = G > 1) \text{ en tension aux bornes de la}$$

capacité n'existe que pour  $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$  (car  $x_r^2 > 0$ !).

◦ Deux cas sont donc à envisager :

(1)  $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$  → le gain en décibels présente un maximum positif pour une pulsation de résonance (en tension)  $\omega_r$  légèrement inférieure à la pulsation  $\omega_0$  (avec  $\omega_r \rightarrow \omega_0$  lorsque  $Q \nearrow$ )

(2)  $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$  → la courbe de gain ne présente pas de maximum : elle est toujours « en dessous » de ses asymptotes.

• Le cas (1) (existence d'un maximum de  $G_{dB}$ ) n'est pas du tout intéressant si l'on désire réaliser un filtre car le gain d'un filtre ne doit avoir que de faibles variations sur sa bande passante !!

Ce circuit sera utilisé en tant que filtre passe-bas du 2<sup>nd</sup> ordre lorsque  $Q \cong \frac{1}{\sqrt{2}}$ .  
Alors, il s'agit bien d'un filtre passe-bas, de pulsation de coupure  $\omega_0$  (car  $G_{dB}(\omega_0) - G_{dB}(max) = -3 \text{ dB}$ ) et dont la bande passante à  $-3 \text{ dB}$  est :  $[0; \omega_0]$ .

α) Réponse en phase :

• Comme  $\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega + LC(j\omega)^2} = \frac{1}{1 - x^2 + j\frac{1}{Q}} = \frac{1}{D} = \frac{D^*}{|D|^2} = \frac{1 - x^2 - j\frac{1}{Q}}{D^2}$  :

•  $\phi = \varphi_s - \varphi_e = \arg(\underline{H}) = \arg\left(1 - x^2 - j\frac{x}{Q}\right)$  et comme  $\sin \phi = \frac{-\frac{x}{Q}}{D} < 0$ , donc :  $-\pi < \phi < 0$

Comme la fonction arctan est définie à  $\pi$  près, l'expression littérale de  $\phi$  dépend du signe de son cosinus :

- Si  $(1 - x^2) > 0$  (soit  $x < 1$ ), alors  $\cos \phi > 0$  (soit  $-\frac{\pi}{2} < \phi < 0$ ) et donc :  $\phi = -\arctan\left(\frac{x}{Q(1 - x^2)}\right)$

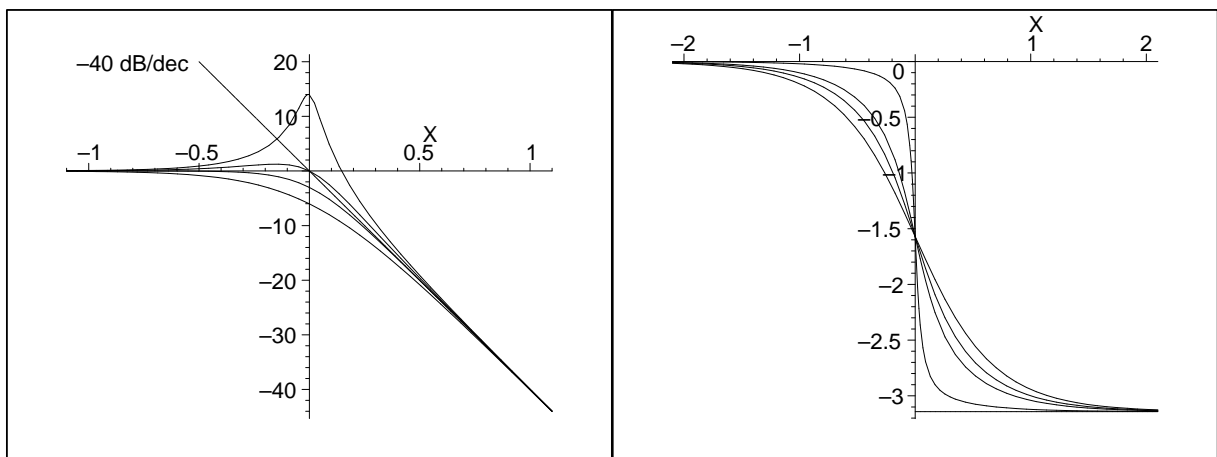
⇒ Donc, si  $x \ll 1$ , la courbe admet une asymptote horizontale :  $\phi(\text{ABF}) = 0$

- Si  $(1 - x^2) < 0$  (soit  $x > 1$ ), alors  $\cos \phi < 0$  (soit  $-\pi < \phi < -\frac{\pi}{2}$ )

et donc :  $\phi = -\pi - \arctan\left(\frac{x}{Q(1 - x^2)}\right)$

⇒ Donc, si  $x \gg 1$ , la courbe admet une asymptote horizontale :  $\phi(\text{AHF}) = -\pi$

• La « rotation » de phase s'effectue pour l'essentiel autour de  $x = 1$  ( $\omega = \omega_0$ ) ; elle est d'autant plus rapide que  $Q$ , le facteur de qualité du circuit ( $RLC$ ) série, est élevé.



III.2.b.α – Courbe de réponse en gain et diagramme asymptotique pour un filtre passe-bas d'ordre 2  $\left(Q = 5, 1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$

III.2.b.β – Courbe de réponse en phase et diagramme asymptotique pour un filtre passe-bas d'ordre 2  $\left(Q = 5, 1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$