

E4 – Réseaux linéaires en régime sinusoïdal forcé

I Régime Sinusoïdal Forcé

I.1 Régime transitoire et régime permanent

a Régime libre et régime permanent :

• L'étude d'un circuit linéaire conduit à résoudre une équation différentielle linéaire à coefficients constants du type :

$$D_2 \frac{d^2x}{dt^2} + D_1 \frac{dx}{dt} + D_0 x = f(t) \quad (E)$$

Pour un circuit d'ordre 2 : $D_2 \neq 0$; pour un circuit d'ordre 1 : $D_2 = 0$.

• Solution de (E) : $x(t) = x_G(t) + x_P(t)$.

→ $x_G \equiv$ **solution générale de l'équation sans 2nd membre** (équation homogène).

Elle dépend des **conditions initiales**.

Elle correspond au régime **libre** du circuit qui est généralement **transitoire** (→ Cf I.1.b)).

→ $x_P \equiv$ **solution particulière de l'équation avec 2nd membre** ; ce second membre traduit la présence d'une source qui impose un régime **forcé** au circuit.

On parle de régime **forcé** mais aussi de régime **permanent** ou **établi**.

La nature de la **réponse** ($x_P(t)$) dépend de l'**excitation** ($f(t)$, source).

Par contre, la réponse $x_P(t)$ ne dépend pas des conditions initiales.

- $\begin{cases} f(t) = cte & \longrightarrow \text{Régime forcé } \mathbf{continu} \text{ (ou } \mathbf{stationnaire}) \rightarrow \text{ Cf Cours } \mathbf{E3}. \\ f(t) \text{ variable} & \longrightarrow \text{Régime forcé } \mathbf{variable}. \\ f(t) \text{ sinusoïdale} & \longrightarrow \text{Régime } \mathbf{sinusoïdal} \text{ forcé ou régime } \mathbf{harmonique} \end{cases}$

■ Propriété : Si l'excitation est harmonique, alors la réponse $x_P(t)$ est harmonique et de même pulsation que l'excitation :

$$f(t) = F_m \cos(\omega t + \varphi_f) \implies x_P(t) = X_{Pm} \cos(\omega t + \varphi_x)$$

avec X_{Pm} et φ_x qui ne dépendent que de l'excitation (F_m et φ_f) seulement.

Rq1 : à $t = 0$, on a : $x_P(t) = X_{Pm} \cos \varphi_x$

◇ **Définition :** φ_x s'appelle la **phase de x_P à l'origine des temps**.
Alors que $(\omega t + \varphi_x)$ est la **phase de x_P à l'instant t** .

Rq2 : Pour que la réponse du circuit $x(t)$ soit sinusoïdale (lorsque le régime forcé est sinusoïdal) il faut que le régime libre du circuit soit transitoire. Alors, $x(t) = x_G(t) + x_P(t) \longrightarrow x_P(t)$ et au bout de quelques τ , durée caractéristique du régime transitoire, on a : $x(t) = x_P(t)$.

b Condition pour que le régime libre soit transitoire :

Il faut que la solution mathématique de (E) ne diverge pas (reste bornée) : c'est le cas lorsque D_2 , D_1 et D_0 sont de même signe.

IV Circuit RLC en régime sinusoïdal forcé

IV.5 Résonance en tension et « Surtension »

- On a $\underline{u}_C(t) = U_{Cm} e^{j\varphi_C} e^{j\omega t} = \underline{U}_C e^{j\omega t}$. On s'intéresse à $U_{Cm}(\omega)$:

$$\underline{U}_C = \underline{Z}_C \underline{I} = \frac{1}{jC\omega} \cdot \frac{\underline{E}}{\underline{Z}} = \frac{1}{jC\omega} \cdot \frac{\underline{E}}{R + j(L\omega - \frac{1}{C\omega})} = \frac{\underline{E}}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega} = \frac{\underline{E}}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}} = \frac{\underline{N}}{\underline{D}}$$

$$U_{Cm}(\omega) = \frac{E_m}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2}} = \frac{E_m}{D} \quad \varphi_C = \arg(\underline{U}_C) = \arg \underline{N} - \arg \underline{D} = -\arg\left(1 - x^2 + j\frac{x}{Q}\right)$$

- Il y a **résonance en tension** si $U_{Cm}(\omega)$ admet un maximum, c'est-à-dire si le carré du dénominateur D admet un minimum :

$$f(x) = D^2 = (1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2} = x^4 + \left(\frac{1}{Q^2} - 2\right)x^2 + 1$$

sa dérivée est :

$$\frac{df}{dx} = 4x^3 + 2\left(\frac{1}{Q^2} - 2\right)x = 4x\left(x^2 + \left(\frac{1}{2Q^2} - 1\right)\right)$$

Elle s'annule pour $x = 0$ (régime continu ; inintéressant ici), et pour $x_r = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} > 0$ (nécessairement positif). Cette valeur non nulle de x_r correspond à la **pulsation de résonance de la tension** :

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \quad (*) \text{ dans ce cas où } Q > \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \text{alors : } U_{Cm}(max) = \frac{E_m Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$$

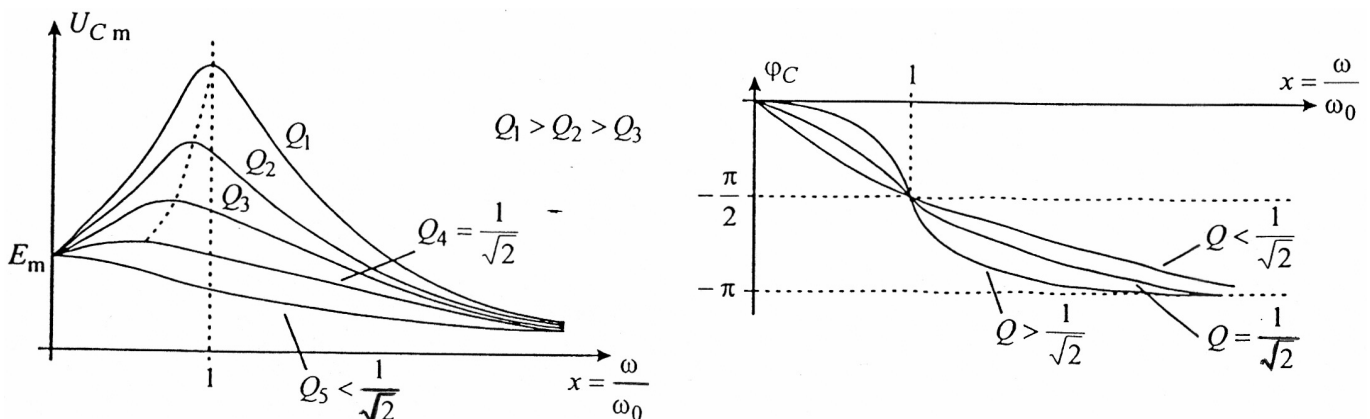
- La résonance en tension (« surtension »), lorsqu'elle a lieu (*i.e.* pour $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$), se produit à une pulsation inférieure à la pulsation propre (il suffit de regarder **(*)**).

Mais, pour un facteur de qualité élevé, c'est-à-dire, pour un faible amortissement, on a $\omega_r \simeq \omega_0$ et alors :

$$U_{Cm}(max) \simeq E_m Q$$

(→ On retrouve, bien entendu, la surtension définie en **5**) comme la tension aux bornes du condensateur (ou de la bobine) à la résonance en intensité.)

- Courbes :**



V Puissance en régime sinusoïdal forcé

V.1 Puissance moyenne

◇ **Définition** : Pour une grandeur périodique, $g(t)$, la moyenne temporelle est définie

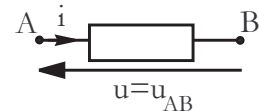
par : $\langle g \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} g(t) dt$ avec t_0 une date quelconque et T la période de g .

• Appliquons cette définition à la puissance électrique moyenne reçue par un dipôle en régime sinusoïdal, pour un dipôle AB , avec :

$$i = i_{A \rightarrow B} = I_m \cos(\omega t + \varphi_i) \text{ et } u_{AB} = U_m \cos(\omega t + \varphi_u),$$

la valeur moyenne de la puissance électrique reçue par le dipôle vaut :

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \langle i_{A \rightarrow B} u_{AB} \rangle = \langle I_m U_m \cos(\omega t + \varphi_i) \cos(\omega t + \varphi_u) \rangle$$



$$\text{Soit : } \langle \mathcal{P} \rangle = \frac{I_m U_m}{2} \left[\underbrace{\langle \cos(\varphi_u - \varphi_i) \rangle}_{\text{constante}} + \underbrace{\langle \cos(2\omega t + \varphi_i + \varphi_u) \rangle}_0 \right]$$

0 car moy. temp. d'une fonction sinusoïdale

◇ **Définition** : La puissance électrique moyenne reçue par un dipôle en régime si-

nusoïdal s'écrit : $\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{U_m I_m}{2} \cos \phi$ avec $\phi \equiv \varphi_u - \varphi_i$.

Elle s'exprime en watts (W), on parle de **puissance active**.

Le coefficient $S = \frac{U_m I_m}{2}$ s'appelle la **puissance apparente** (en V.A.).

Le facteur $\cos \phi$ s'appelle le **facteur de puissance**.

• **Autres expressions utiles de la puissance active $\langle \mathcal{P} \rangle$ et du facteur de puissance $\cos \phi$** :

On se place en régime sinusoïdal (= harmonique).

Soit un dipôle linéaire d'impédance : $\underline{Z} = \frac{U_{AB}}{I} = R(\omega) + jX(\omega) = Z e^{j\phi} = Z(\cos \phi + j \sin \phi)$

avec $\phi = \varphi_u - \varphi_i$.

$$\text{On en déduit : } \cos \phi = \frac{R}{Z}$$

On peut aussi utiliser l'admittance : $\underline{Y} = \frac{I}{U_{AB}} = G + jB = \frac{1}{Z} e^{-j\phi} = Y(\cos \phi - j \sin \phi)$.

$$\text{On en déduit : } \cos \phi = \frac{G}{Y}$$

Si on exprime la puissance apparente S en fonction de Z ou Y :

$$U_m \equiv Z(\omega) I_m \Rightarrow \frac{U_m I_m}{2} = \frac{Z I_m^2}{2} \quad \text{ou encore} \quad I_m \equiv Y(\omega) U_m \Rightarrow \frac{U_m I_m}{2} = \frac{Y U_m^2}{2}$$

$$\text{D'où } \langle \mathcal{P} \rangle = S \cos \phi \text{ s'écrit également : } \langle \mathcal{P} \rangle = \frac{R I_m^2}{2} = \frac{G U_m^2}{2}$$

• **Conséquences** :

(1) Pour une bobine ou un condensateur, $R = 0$, donc : $\langle \mathcal{P} \rangle = 0$.

En régime sinusoïdal, *en moyenne*, une bobine ou un condensateur ne consomme pas d'énergie : ils restituent, *en moyenne*, autant d'énergie qu'ils en reçoivent.

(2) Un dipôle passif se comporte toujours en récepteur : sa puissance active (= puissance moyenne reçue en régime sinusoïdal) est positive, donc $R > 0$ et $G > 0$.

→ les parties réelles de l'impédance et de l'admittance d'un dipôle linéaire *passif* sont toujours positives.

V.2 Grandeurs Efficaces

◇ **Définition** : pour une grandeur $g(t)$, la valeur efficace est définie par :

$$G_{\text{eff}} = \sqrt{\langle g^2 \rangle} \quad a.$$

a. On prend la racine de la valeur moyenne du carré de la grandeur ; voilà pourquoi les anglosaxons parle de RMS pour Root (racine), Mean (moyenne) et Square (carré).

- Cas du régime sinusoïdal : $i = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$

$$\rightarrow I_{\text{eff}}^2 = \langle I_m^2 \cos^2(\omega t + \varphi_i) \rangle = \langle \frac{I_m^2}{2} (1 + \cos(2\omega t + \varphi_i)) \rangle = \frac{I_m^2}{2}$$

d'où : $I_{\text{eff}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$ et, de même : $U_{\text{eff}} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$

d'où, en régime sinusoïdal : $\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{U_m I_m}{2} \cos \phi = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \phi = R I_{\text{eff}}^2 = G U_{\text{eff}}^2$

Rq : Les appareils de mesures (multimètres) indiquent la valeur efficace des grandeurs mesurées en position *AC* ou \sim . En position *DC* ou $=$, ils indiquent la valeur moyenne des grandeurs.

On distingue deux type de multimètres :

- les multimètres TRUE RMS ("à valeurs efficaces vraies") qui peuvent mesurer la valeur efficace de n'importe quel signal (sinusoïdal, carré, triangulaire, etc...)

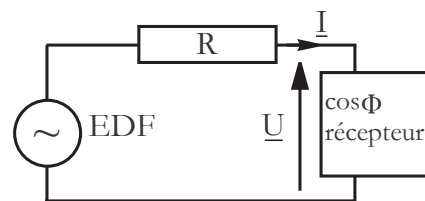
- Les multimètres RMS qui, pour évaluer G_{eff} , se contentent de mesurer G_m et indiquent $\frac{G_m}{\sqrt{2}}$.

La mesure n'est alors correcte que pour les grandeurs sinusoïdales !!

Bien entendu, il y a une différence de prix ...

V.3 Importance du facteur de puissance

- Soit un réseau composé de :
 - un générateur du réseau de distribution EDF
 - une installation réceptrice d'un usager
 - une ligne de transport de résistance R .



- La puissance moyenne reçue (et donc consommée) par l'usager vaut : $\langle \mathcal{P}_{\text{cons}} \rangle = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \phi$.

- La puissance moyenne dissipée dans la ligne vaut : $\langle \mathcal{P}_{\text{diss}} \rangle = \frac{1}{2} R I_m^2 = R I_{\text{eff}}^2$.

- Le **coefficient de perte** est défini par $\rho = \frac{\langle \mathcal{P}_{\text{diss}} \rangle}{\langle \mathcal{P}_{\text{cons}} \rangle} = \frac{R I_{\text{eff}}}{U_{\text{eff}} \cos \phi} = \frac{R \langle \mathcal{P}_{\text{cons}} \rangle}{U_{\text{eff}}^2 \cos^2 \phi}$.

Pour réduire ρ il faut :

- diminuer R
- augmenter U_{eff} (on utilise des lignes à hautes tensions)
- augmenter $\cos \phi$ (en France, la législation impose $\cos \phi > 0,9$ sous peine d'amende).

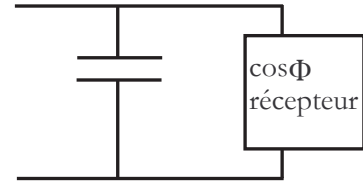
- Comment peut-on améliorer le facteur de puissance $\cos \phi$?

En général, l'admittance des installations réceptrices est de la forme $\underline{Y} = G + jB$, avec $B < 0$ à cause des bobines des moteurs.

On place un condensateur en parallèle avec l'installation à "améliorer" :

L'admittance totale devient : $\underline{Y} = G + j(B + C\omega)$,
 en prenant $C = -\frac{B}{\omega}$, on obtient \underline{Y} réel, doù : $\cos \phi = 1$.

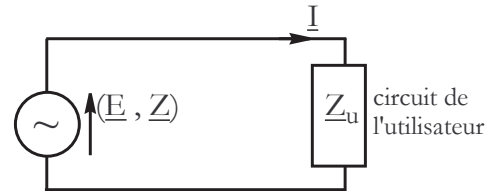
→ On dit qu'on a relevé le facteur de puissance.



V.4 Transfert de puissance et adaptation d'impédance

• On considère un montage constitué d'un générateur de f.é.m. d'amplitude complexe \underline{E} et d'impédance interne complexe \underline{Z} branché sur une impédance d'utilisation \underline{Z}_u .

Position du problème : On cherche la valeur de \underline{Z}_u pour laquelle la puissance moyenne reçue par \underline{Z}_u est maximale. On dit alors que la charge \underline{Z}_u est adaptée.



• Loi de POUILLET : $\underline{I} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z} + \underline{Z}_u}$ avec $\underline{Z} = R + jX$ et $\underline{Z}_u = R_u + jX_u$.

Or , la puissance moyenne reçue par \underline{Z}_u vaut : $\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{1}{2} R_u |\underline{I}|^2$ d'où :

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{1}{2} R_u \frac{E^2}{(R + R_u)^2 + (X + X_u)^2}$$

Pour R, R_u et X fixés, $\langle \mathcal{P} \rangle$ est maximum pour $X + X_u = 0$, soit pour $X = -X_u$.

Dans ce cas :

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{E^2}{2} \frac{R_u}{(R + R_u)^2} \Rightarrow \frac{d \langle \mathcal{P} \rangle}{d R_u} = \frac{E^2}{2} \frac{1}{(R + R_u)^4} [(R + R_u)^2 - 2R_u(R + R_u)] = \frac{E^2}{2} \frac{R - R_u}{(R + R_u)^3}$$

R_u	0	R	∞
$\frac{d \langle \mathcal{P} \rangle}{d R_u}$	+	0	-
$\langle \mathcal{P} \rangle$	↗	$\frac{E^2}{8R}$	↘

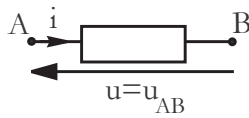
La puissance maximale reçue par \underline{Z}_u est obtenue pour :

$$X_u = -X \quad \text{et} \quad R_u = R$$

C'est à dire pour : $\underline{Z}_u = \underline{Z}^*$
 avec \underline{Z}^* le complexe conjugué de \underline{Z} .

→ lorsque $\underline{Z}_u = \underline{Z}^*$, on dit qu'il y a **adaptation d'impédance**.

VI Puissance Complexe (Hors Programme)



$$i = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$$

$$u = U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$$

◇ **Définition** : La puissance complexe reçue par le dipôle est définie par :

$$\underline{\mathcal{P}} = \frac{1}{2} \underline{u} \cdot \underline{i}^* \quad a$$

a. Attention, ce n'est pas $\underline{u} \cdot \underline{i}$!!!

On a alors :

$$\underline{\mathcal{P}} = \frac{1}{2} U_m e^{j\varphi_u} I_m e^{-j\varphi_i} = \frac{U_m I_m}{2} e^{j\phi} = \underbrace{\frac{U_m I_m}{2} \cos \phi}_{\text{puiss. active=p.moy. reçue}=\langle \mathcal{P} \rangle} + j \underbrace{\frac{U_m I_m}{2} \sin \phi}_{\text{puissance réactive } \mathcal{P}_r}$$

→

$$\Re(\underline{\mathcal{P}}) = \langle \mathcal{P} \rangle$$

• Exemples :

Résistance R :

$$\underline{\mathcal{P}} = \frac{1}{2} \underline{u} \cdot \underline{i}^* = \frac{1}{2} R \underline{i} \cdot \underline{i}^* = \frac{1}{2} R |\underline{i}|^2 = \frac{1}{2} R I_m^2 \Rightarrow \langle \mathcal{P}_R \rangle = \frac{1}{2} R I_m^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_{r,R} = 0.$$

Bobine L :

$$\underline{\mathcal{P}} = \frac{1}{2} \underline{u} \cdot \underline{i}^* = \frac{1}{2} j L \omega \underline{i} \cdot \underline{i}^* = j \frac{L\omega}{2} |\underline{i}|^2 = j \frac{L\omega}{2} I_m^2 \Rightarrow \langle \mathcal{P}_L \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_{r,L} = \frac{L\omega}{2} I_m^2.$$

Condensateur C :

$$\underline{\mathcal{P}} = \frac{1}{2} \underline{u} \cdot \underline{i}^* = \frac{1}{j 2C\omega} \underline{i} \cdot \underline{i}^* = -j \frac{1}{2C\omega} R |\underline{i}|^2 = -j \frac{1}{2C\omega} I_m^2 \Rightarrow \langle \mathcal{P}_C \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_{r,C} = -\frac{1}{2C\omega} I_m^2.$$