E3 – Régimes transitoires

I Définitions

I.1 Régime libre, régime transitoire et régime continu

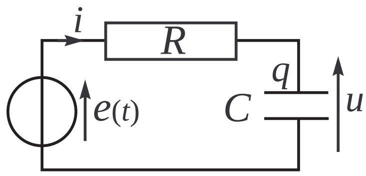
♢ **Définition :** On appelle
• **réponse libre** ou **régime libre** d'un circuit, l'évolution de celui-ci en l'absence de tout générateur.
• Le régime du circuit est dit **continu** (ou **stationnaire**) lorsque toutes les grandeurs électriques du circuit (intensités, tensions) sont des constantes (du temps).
• Entre le moment où toutes les sources sont éteintes et celui où le régime continu est établi, on a un **régime transitoire**.
• Le réseau étant linéaire, l'évolution de toute grandeur électrique (intensité, tension, charge d'un condensateur…) est décrite par une équation différentielle linéaire à coefficients constants de la forme :

$$D_n \frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n} + D_{n-1} \frac{\mathrm{d}^{n-1} x}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \ldots + D_1 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + D_0 x = f(t)$$

où l'ordre n de l'équation différentielle définit **l'ordre du circuit**.
Nous étudierons les circuit d'ordre 1 et d'ordre 2.

Ex : Circuit du 1^{er} ordre régit par l'équation :

$$RC\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u = e(t)$$



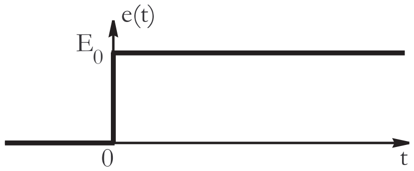
On montre, en mathématiques, que la solution générale d'une telle équation se met toujours sous la forme :

$$u(t) = \underbrace{u_G}_{\text{régime libre (transitoire)}} + \underbrace{u_P}_{\text{régime forcé imposé par la source}}$$

• Où :
- u_G est la solution générale de l'équation homogène (*i.e.* équation sans second membre) : elle correspond au régime libre du circuit (absence de source de tension ou de courant).
- u_P est une solution particulière de l'équation avec second membre : elle correspond au régime forcé imposé par la source.
• Tant que $\mid u_G(t) \mid \sim \mid u_P \mid$, on est dans le domaine du régime transitoire.
Lorsque $\mid u_G \mid \ll \mid u_P \mid$, le régime forcé est établi (ici, régime continu).

I.2 Échelon de tension

Un générateur délivre un échelon de tension lorsque la tension à ses bornes a la forme suivante :



$$\begin{cases} \text{pour } t < 0 : & e(t) = 0 \\ \text{pour } t > 0 : & e(t) = E_0 \end{cases}$$

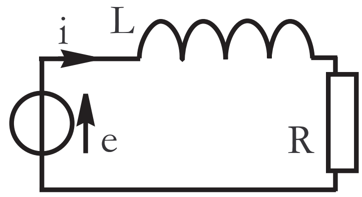
Une telle tension provoque dans un circuit l'apparition d'un régime transitoire puis d'un régime permanent continu. Cette évolution du circuit porte le nom de **réponse à un échelon de tension** ou **réponse indicielle.**

II Circuit RL série

II.1 Étude théorique de l'évolution du courant :

Nous allons étudier la réponse indicielle d'un circuit RL série, puis son régime libre.

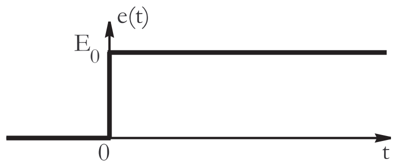
a Montage :



Dans le circuit ci-contre, la loi des mailles s'écrit :
$-e + Ri + L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0$. Soit : $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \dfrac{R}{L}i = \dfrac{e(t)}{L}}$ (E)
C'est une équation différentielle linéaire du 1^{er} ordre à coefficients constants et avec 2^{nd} membre.

> ♢ **Définition :** L'homogénéité de la relation impose $\tau = \dfrac{L}{R}$ homogène à un temps : c'est le **temps caractéristique / constante de temps** du circuit RL.

b Établissement du courant :



• $e(t)$ est un échelon de tension, soit $\begin{cases} t < 0 : & e(t) = 0 \\ t \geq 0 : & e(t) = E_0 \end{cases}$

À $t \geq 0$, l'équation différentielle s'écrit : $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \dfrac{R}{L}i = \dfrac{E_0}{L}$ (1)

→ La solution de (1) s'écrit : $i = i_G + i_P$.

Rappel : $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + kx = 0 \;\Rightarrow\; x_G = Ae^{-kt}$ avec $A \in \mathbb{R}$.

Ici : $\boxed{i_G = Ae^{-\frac{R}{L}t} = A\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)}$ et $i_P = cte$ (puisque le second membre de (1) est constant)

Donc i_P doit vérifier $\dfrac{\mathrm{d}i_P}{\mathrm{d}t} + \dfrac{R}{L}i_P = \dfrac{E_0}{L}$, d'où $\boxed{i_P = \dfrac{E_0}{R}}$. Finalement : $\boxed{i = \dfrac{E_0}{R} + Ae^{-\frac{R}{L}t}}$.

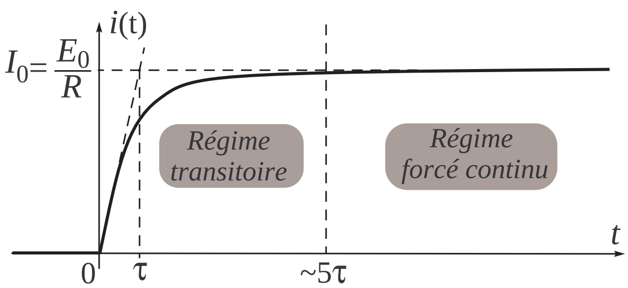
• Pour déterminer la constante d'intégration A, **on a besoin d'une condition initiale** (**C.I.**), c'est-à-dire la valeur de l'intensité i à une date donnée $t \geq 0$.
On note la date « Juste avant $t = 0$ » comme suit : $t = 0^-$.
On note la date « Juste après $t = 0$ » comme suit : $t = 0^+$.
On suppose, par exemple, qu'en $t = 0^-$ il n'y a aucun courant dans le circuit. La condition initiale s'écrit donc : $i(0^-) = i_0 = 0$.

• Or, on sait que *le courant traversant une bobine est une fonction continue du temps* (➜ Cf Cours)→ D'où : $i(0^+) = i(0^-) = i_0 = 0$, par continuité de l'intensité i.

On a donc : $i(0^+) = \begin{cases} i(0^-) = i_0 = 0 \\ i(t = 0^+) = \dfrac{E_0}{R} + Ae^{-\frac{R}{L}0} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boxed{A = -\dfrac{E_0}{R}}$.

Conclusion : $\boxed{i = \dfrac{E_0}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})}$

Lorsque $t \to \infty$, $i \to \dfrac{E_0}{R} = I_0$:
le régime transitoire s'efface et laisse place au régime permanent continu.



• Par suite : $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \dfrac{E_0}{L} e^{-\frac{R}{L}t}$, soit $\left(\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0} = \dfrac{E_0}{L}$

Donc, l'équation de la tangente à la courbe en $O(0,0)$ est : $y = \dfrac{E_0}{L} t$.

On a $y = I_0 = \dfrac{E_0}{R}$ pour $t = \dfrac{L}{E_0}\dfrac{E_0}{R} = \dfrac{L}{R} = \tau$.

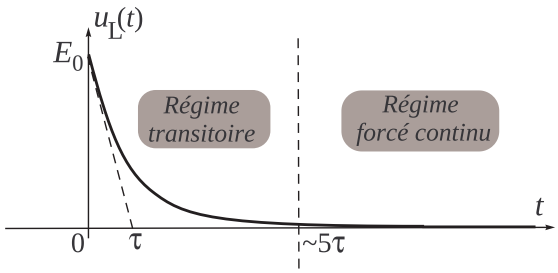
▮Propriété : On se rend compte que $\boxed{\tau = \dfrac{L}{R}}$ donne un *ordre de grandeur de la durée du régime transitoire.*

Ordre de grandeur : $\begin{cases} L \simeq 10^{-3}\ H \\ R \simeq 10^{3}\ \Omega \end{cases} \Rightarrow \boxed{\tau \simeq 10^{-6}\ s}$ …c'est très faible : le régime transitoire »s'éteint » rapidement.

• Représentation de u_L tension aux bornes de la bobine : $u_L = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = L\dfrac{E_0}{L} e^{-\frac{R}{L}t}$,

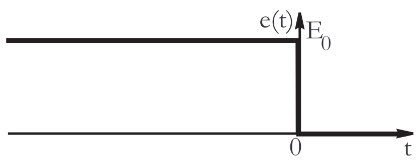
soit : $\boxed{u_L = E_0 e^{-\frac{R}{L}t} = E_0 \exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)}$.

Pendant le régime transitoire, la bobine cherche à 'contrer' la tension du générateur en imposant une tension de sens opposé (loi de Lenz).
En régime établi (régime permanent continu), $u_L = 0$. *On retrouve qu'en régime continu la bobine se comporte comme un fil conducteur.*



c Extinction de la source (étude du régime libre) :

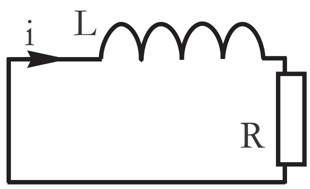
•



Pour simplifier les calculs, on réinitialise le temps :

$$\begin{cases} \text{pour } t < 0 : & e(t) = E_0 \\ \text{pour } t \geq : & e(t) = 0 \end{cases}$$

• Le montage se ramène alors à →



La loi des mailles s'écrit, pour $t \geq 0$: $\boxed{L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = 0}$ (E).

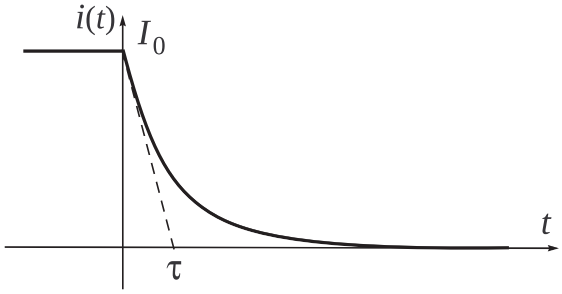
C'est une équation différentielle linéaire du 1^{er} ordre à coefficients constants et sans 2^{nd} membre.

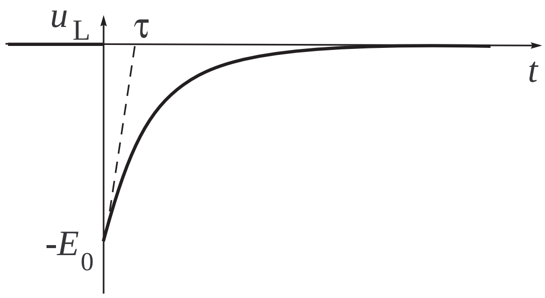
• La solution s'écrit : $i = Be^{-\frac{R}{L}t}$ avec $B \in \mathbb{R}$.
De plus, par continuité de l'intensité traversant la bobine, on a :

$i(0^+) = \begin{cases} i(0^-) = I_0 = \dfrac{E_0}{R} \\ i(t = 0^+) = B \end{cases} \Rightarrow$ d'où : $\boxed{B = \dfrac{E_0}{R}}$. Finalement : $\boxed{i(t) = \dfrac{E_0}{R} e^{-\frac{R}{L}t}}$.

Cl : donc la tension aux bornes de la bobine est : $u_L = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = L\dfrac{E_0}{R}\left(-\dfrac{R}{L} e^{-\frac{R}{L}t}\right)$,

soit : $\boxed{u_L = -E_0 e^{-\frac{R}{L}t}}$.
On se rend compte que le **régime libre** est un **régime transitoire** de durée de l'ordre du temps caractéristique du circuit RL série $\tau = \dfrac{L}{R}$: au bout de « quelques » τ , $i \to 0$ et $u_L \to 0$.

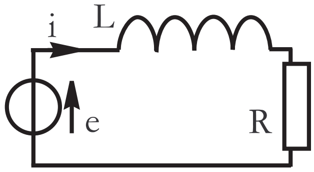




II.2 Étude énergétique

a Puissance instantanée reçue par la bobine :

La puissance fournie par le générateur au reste du circuit vaut :



$$\mathcal{P}_{fournie} = e.i$$

(On suppose la source de tension idéale, donc sans résistance interne.)

D'après la loi des mailles : $e = Ri + L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$, d'où :

$$\boxed{\mathcal{P}_{fournie} = \underbrace{Ri^2}_{\text{puissance dissipée par effet JOULE dans R}} + \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Li^2\right)}_{\mathcal{P}_L \text{ puissance reçue par la bobine}}}$$

b Établissement du courant :

• on définit $t_0 \gg \tau$; ainsi, à la date t_0, on est en **régime continu**, soit : $i(t_0) = I$.

• Calcul de l'énergie emmagasinée $\mathcal{E}_L$ par la bobine entre $t = 0$ et t_0 :

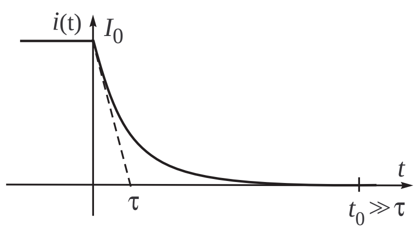
On a, par définition : $\mathcal{P}_L = \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_L}{\mathrm{d}t}$

$$\Rightarrow \mathcal{E}_L = \int_0^{t_0} \mathcal{P}_L \mathrm{d}t = \int_0^{t_0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Li^2\right)\mathrm{d}t = \left|\frac{1}{2}Li^2\right|_0^{t_0} = \frac{1}{2}L.i(t_0)^2 - 0 = \frac{1}{2}LI^2 \Rightarrow \boxed{\mathcal{E}_L = \frac{1}{2}LI^2}$$

Propriété : Cette énergie est stockée dans la bobine *tant qu'on est en régime permanent continu.*

c Extinction de la source :

noi • on réinitialise le temps : ainsi, la date $t = 0$ correspond à l'extinction de la source, soit : $i(t = 0^-) = I$. Cette fois, à $t = t_0$, l'intensité est nulle.



• Calcul de l'énergie $\mathcal{E}_R$ dissipée dans R par effet Joule entre $t = 0$ et t_0 :

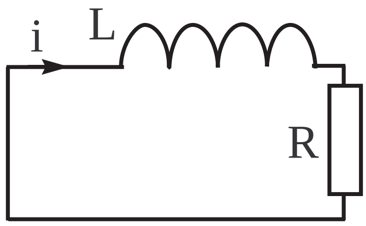
À tout instant t, on a la relation : $\mathcal{P}_J = Ri^2 = \dfrac{\mathrm{d}\mathcal{E}_R}{\mathrm{d}t}$.

Par suite : $\mathcal{E}_R = |\mathcal{E}_R(t)|_0^{t_0} = \displaystyle\int_0^{t_0} \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_R(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \int_0^{t_0} \mathcal{P}_{\text{Joule}}\mathrm{d}t = \int_0^{t_0} Ri^2\mathrm{d}t$

Or le circuit est équivalent au circuit ci-contre.

Donc : $Ri = -L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \Rightarrow Ri^2 = -Li.\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{1}{2}Li^2\right)$

Finalement :



$$\mathcal{E}_R = \int_0^{t_0} -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Li^2\right)dt = \left| -\frac{1}{2}L.i^2\right|_0^{t_0} = 0 - \left(-\frac{1}{2}LI^2\right)$$

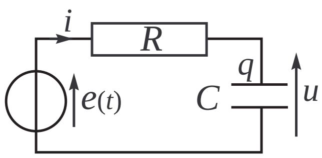
CI : $\boxed{\mathcal{E}_R = \frac{1}{2}LI^2 = \mathcal{E}_L}$.

▌propriété : Toute l'énergie stockée dans la bobine idéale est **intégralement** restituée et a été (ici) dissipée par effet JOULE.

III Circuit RC série

III.1 Étude théorique de la charge et de la décharge d'un condensateur

a Montage :



La loi des mailles s'écrit : $-e + Ri + \dfrac{q}{C} = 0$, avec $i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$.

Les deux équations se combinent pour donner :

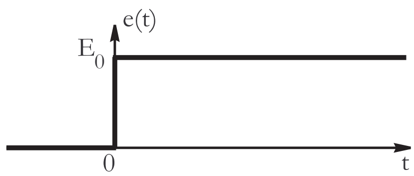
$$\boxed{\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}q = \frac{e}{R}}$$

C'est une équation différentielle linéaire du 1^{er} ordre à coefficients constants et avec 2^{nd} membre.

♢ **Définition :** L'homogénéité de la relation impose $\tau = RC$ homogène à un temps : c'est le **temps caractéristique / constante de temps** du circuit RC série.

b Mise en fonction de la source :

• Il y a charge du condensateur sous la tension $e(t)$ telle que :
$$\begin{cases} \text{pour } t < 0 : & e(t) = 0 \\ \text{pour } t \geq 0 : & e(t) = E_0 \end{cases}$$



• Pour $t \geq 0$, l'équation différentielle s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}q = \frac{E_0}{R} \quad (1)$$

• La solution de (1) est : $q = q_G + q_P$ (sol. générale de l'éq. *sans* 2^{nd} membre + sol. particulière de l'éq. *avec* second membre).

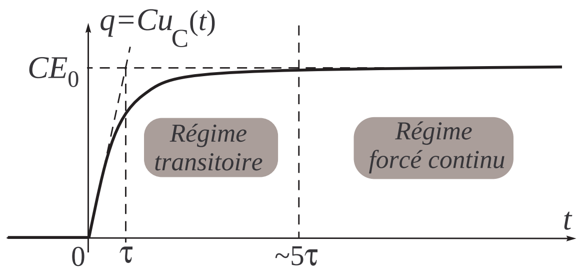
$$\begin{cases} \rightarrow \text{avec :} \quad q_G = \lambda e^{-\frac{t}{RC}} = \lambda \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \\ \qquad\qquad\quad q_P = CE_0 \end{cases} \Rightarrow \quad \text{Soit : } q(t) = \lambda e^{-\frac{t}{RC}} + CE_0$$

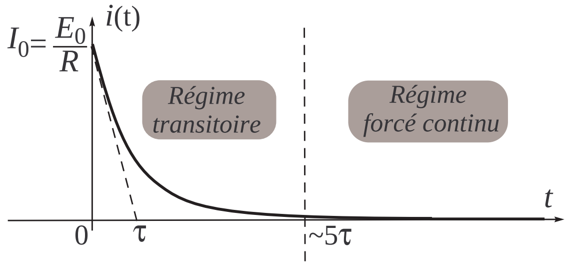
• Pour déterminer λ, on suppose (par exemple) que pour $t < 0$, le condensateur n'est pas chargé ($q(t = 0^-) = q_0 = 0$).

• De plus, la **continuité de la charge aux armatures du condensateur** (➜ Cf Cours)impose : $q(t = 0^+) = q(t = 0^-)$.

• Donc : $q(0^+) = \begin{cases} q(0^-) = 0 \\ q(t=0^+) = \lambda + CE_0 \end{cases} \Rightarrow$ soit : $\boxed{\lambda = -CE_0}$.

Ainsi : $\boxed{q(t) = CE_0(1 - e^{-\frac{t}{RC}})}$ et $\boxed{i(t) = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = I_0 e^{-\frac{t}{RC}}}$ avec $\boxed{I_0 = \dfrac{E_0}{R}}$



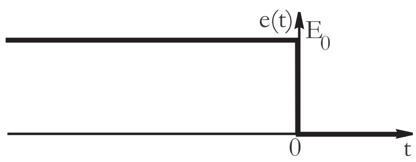


Propriété : On remarque que le **régime continu** est atteint lorsque le condensateur a atteint sa charge maximale sous la tension E_0 ; alors, le courant ne circule plus.
$\longrightarrow$ En régime continu, le condensateur se comporte comme un *interrupteur ouvert*.

c Extinction de la source :

On réinitialise le temps pour simplifier les calculs :

• Il y a décharge du condensateur lorsque on éteint $e(t)$:
$\begin{cases} \text{pour } t < 0 : & e(t) = E_0 \\ \text{pour } t \geq 0 : & e(t) = 0 \end{cases}$



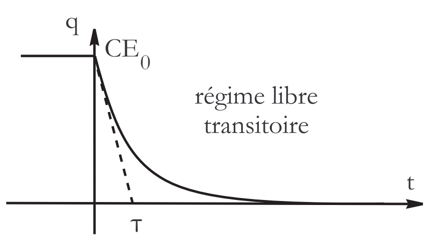
Pour $t \geq 0$, l'équation différentielle s'écrit :

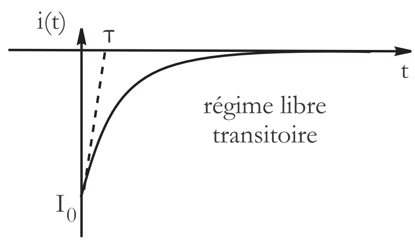
$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}q = 0 \quad (2) \text{ de solution : } q = \mu e^{-\frac{t}{RC}} = \mu \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \text{ avec } \mu \in \mathbb{R}$$

• Détermination de μ :
- Pour $t < 0$, $q = CE_0$ (car on suppose le condensateur complètement chargé sous la tension E_0).
- *Par continuité de la charge*, nous obtenons : $q(t = 0^+) = q(t = 0^-)$,

soit : $q(t = 0^+) = \begin{cases} q(0^-) = CE_0 \\ q(t=0^+) = \mu \end{cases} \Rightarrow$ d'où : $\boxed{\mu = CE_0}$.

Ainsi : $\boxed{q(t) = CE_0 e^{-\frac{t}{RC}}}$ et $\boxed{i(t) = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = -I_0 e^{-\frac{t}{RC}}}$ en posant : $\boxed{I_0 = \dfrac{E_0}{R}}$.



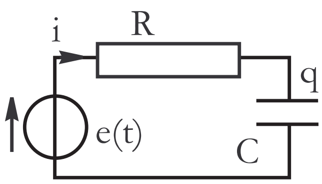


Rq : $i < 0$ car la décharge se fait dans le sens opposé au sens *positif conventionnel* du schéma.

III.2 Étude énergétique

La puissance fournie au circuit par le générateur, de résistance interne négligeable, vaut :

$$\mathcal{P}_f(t) = e(t)i(t) = \left(Ri + \frac{q}{C}\right) i$$



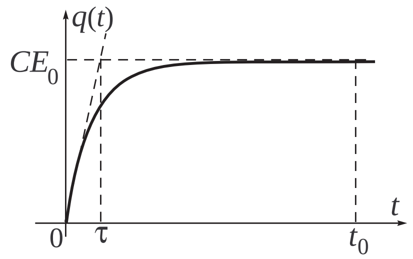
avec $i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$, il vient : $qi = q\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{1}{2}q^2\right)$.

$\longrightarrow$ d'où : $\boxed{\mathcal{P}_f = \underbrace{Ri^2}_{\text{dissipée par effet JOULE ds R}} + \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}\right)}_{\text{emmagasinée dans C à la date t}}}$

a Charge du condensateur :

• On calcule l'énergie *emmagasinée* par le condensateur entre $t = 0$ et $t = t_0$ avec $t_0 \gg t$.

Par définition, l'énergie emmagasinée $\mathcal{E}_C$ entre $t = 0$ et t_0 est la *variation d'énergie électrostatique* $\mathcal{E}_C(t) = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$ du condensateur :
$\mathcal{E}_C = \Delta_{0\to t_0}\mathcal{E}_C(t) = \mathcal{E}_C(t_0) - \mathcal{E}_C(0) = \frac{1}{2}CE_0^2 - 0$,
ou encore :



$$\mathcal{E}_C = \Delta_{0\to t_0}\mathcal{E}_C(t) = \int_0^{t_0} d\mathcal{E}_C(t) = \int_0^{t_0} \mathcal{P}_{\text{reçue par C}}\mathrm{d}t$$

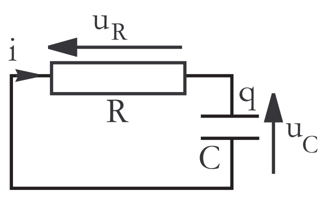
Donc : $\mathcal{E}_C = \displaystyle\int_0^{t_0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}\right)\mathrm{d}t = \int_0^{t_0} \mathrm{d}\left(\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}\right) = \left|\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}\right|_0^{t_0}$, soit : $\boxed{\mathcal{E}_C = \dfrac{1}{2}CE_0^2}$

▮ Propriété : Cette énergie $\mathcal{E}_C$ est **emmagasinée** par le condensateur : elle n'est pas dissipée (perdue), mais **stockée** tant que le régime est **continu**.

b Décharge du condensateur :

• Pour simplifier le problème, on réinitialise le temps au début de la décharge ($t = 0$ est désormais l'instant où on éteint la source qui auparavant avait chargé le condensateur à sa charge maximale CE_0).

• La loi des mailles donne $u_R + u_C = 0$, soit : $u_R = -u_C = -\dfrac{q}{C}$.
La puissance reçue par la résistance R pendant la décharge vaut :

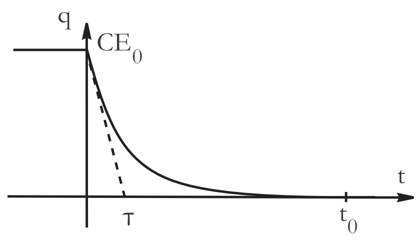


$$\mathcal{P}_{\text{reçue par}}\ R(t) = u_R i = -\frac{q}{C}i = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}\right).$$

Cette puissance reçue est intégralement dissipée par effet JOULE.
• L'énergie dissipée par effet JOULE entre les instants $t = 0$ et t_0 – c'est-à-dire du début à la fin de la décharge, est donc l'énergie reçue par la résistance, $\mathcal{E}_R$, entre $t = 0$ et t_0 avec :

$\mathcal{P}_J = \mathcal{P}_{\text{reçue par}}\ R = \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_R}{\mathrm{d}t}$;

d'où : $\mathcal{E}_R = \displaystyle\int_0^{t_0} \mathcal{P}_J\mathrm{d}t = \int_0^{t_0} -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}\right)\mathrm{d}t = \left| -\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}\right|_0^{t_0}$



Finalement : $\boxed{\mathcal{E}_R = \dfrac{1}{2}CE_0^2 = \mathcal{E}_C}$.

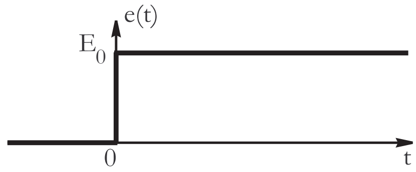
▮ Propriété : Lors de la décharge du condensateur, toute l'énergie stockée est dissipée dans la résistance par effet JOULE.

Application : cette énergie peut actionner le flash d'un appareil photo ou un moteur par ex.

IV Circuit RLC série

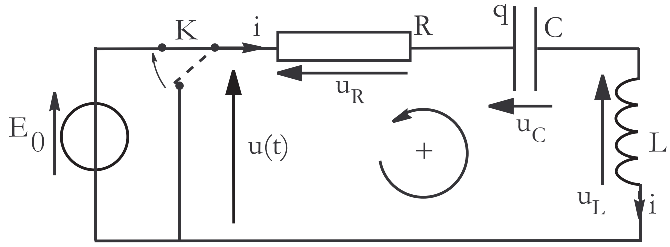
.

IV.2 Réponse indicielle d'un circuit RLC Série (réponse à un échelon de tension)



• dans tout ce paragraphe, on suppose le condensateur initialement déchargé : $q(t=0^-)=q(t=0^+)=q_0=0$.
• On ferme l'interrupteur K à l'instant $t=0$.
la tension $u(t)$ aux bornes du circuit (RLC) série est un échelon de tension.

• $\forall t$, on applique la loi des mailles :
$-u(t)+Ri+\frac{q}{C}+L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=0$; avec $i=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$, soit :



$$L\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2}+R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}+\frac{q}{C}=u(t)$$

$\longrightarrow$ Ainsi :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2}+\frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{LC}q=\frac{u(t)}{L}} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2q=\frac{u(t)}{L}} \qquad (E)$$

Le circuit est régi par une équation différentielle du 2^{nd} ordre à cœfficients constants *avec* 2^{nd} membre.

• Pour $t\geq 0$, on peut écrire : $\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}+\omega o^2q=\frac{E_0}{L}$ $\qquad (E)$.

$\rightarrow$ Solution générale de (E) : $q(t)=q_G(t)+q_P(t)$, avec :
- $q_G\equiv$ **solution générale de l'équation sans 2^{nd} membre** ; elle correspond au régime *libre* du circuit (RLC) qui est *transitoire* $\rightarrow$ Cf. **IV.1)** ;
- $q_P\equiv$ **solution particulière de l'équation avec 2^{nd} membre** ; ce second membre traduit la présence d'une source qui impose un régime *forcé* au circuit (RLC) ; si la *f.é.m.* est continue, ce régime forcé est *permanent continu*.

• On cherche q_P sous la forme d'une fonction constante puisque le 2^{nd} membre est constant ; (E) devient :

$$0+0+\omega_0^2q_P=\frac{E_0}{L} \quad \Longleftrightarrow \quad q_P=\frac{E_0}{\omega_0^2L}=CE_0 \qquad \text{Soit : } \boxed{q_P=CE_0}$$

• **Trois cas se présentent pour la solution q_G :** ils correspondent aux trois régimes libres transitoires possibles :
α) Régime libre apériodique ; β) Régime libre critique et γ) régime libre pseudo-périodique

• **Exemple : cas γ)** le régime libre transitoire est pseudo-périodique : $\boxed{\Delta<0}$ et $\boxed{Q>\frac{1}{2}}$.
Les racines de l'équation caractéristique de l'équation sans 2^{nd} membre sont des *racines complexes conjuguées*, qu'on peut écrire sous la forme $r_{1/2}=-\frac{1}{\tau}\pm j\omega$ – et donc :

$$\boxed{q_G(t)=(A\cos\omega t+B\sin\omega t)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)} \quad \text{avec : } \tau=\frac{2Q}{\omega_0} \text{ et } \omega=\frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2-1}=\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}$$

$\rightarrow$ Alors, la solution générale de (E) s'écrit :

$$\begin{aligned} q(t) &= p_P+q_G(t)=CE_0+(A\cos\omega t+B\sin\omega t)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \\ \rightarrow \quad i(t) &= \left[\left(B\omega-\frac{A}{\tau}\right)\cos\omega t-\left(A\omega-\frac{B}{\tau}\right)\sin\omega t-\right]\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \end{aligned}$$

Dans les expressions précédentes, A et B sont deux constantes d'intégration fixées par les **C**onditions **I**nitiales ; choisissons le cas initial suivant : $\{q(0^-) = q_0 = 0 \; ; \; i(0^-) = i_0 = 0\}$.
Dès lors :
- la conservation de la charge aux bornes du condensateur se traduit par :

$$q(0^+) = \begin{cases} q(0^-) = q_0 = 0 \\ q(t = 0^+) = CE_0 + A \end{cases} \Rightarrow \boxed{A = -CE_0}$$

- la conservation de l'intensité traversant la bobine se traduit par :

$$i(0^+) = \begin{cases} i(0^-) = i_0 = 0 \\ i(t = 0^+) = -\dfrac{A}{\tau} + B\omega \end{cases} \Rightarrow \boxed{B = \dfrac{A}{\tau\omega} = \dfrac{CE_0}{\tau\omega}}$$

Finalement : $$\boxed{q(t) = CE_0 \left[1 - \left(\cos\omega t + \frac{1}{\tau\omega}\sin\omega t\right)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]} \quad (\star)$$ Cf. Doc 10 et 12.

Rq1 : On peut remarquer que : $\tau\omega = \sqrt{4Q^2 - 1}$.
Rq2 : Cf. Doc 9 et 11 pour les cas α) et β).

L'expression finale de $q(t)$ permet de retrouver celle de l'intensité dans le circuit :

$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = -CE_0 \left[\left(-\frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau}\right)\cos\omega t + \left(-\omega - \frac{1}{\tau^2\omega}\right)\sin\omega t\right]\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

Soit : $$\boxed{i(t) = CE_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\left(\omega + \frac{1}{\tau^2\omega}\right)\sin\omega t} \quad (\star\star)$$

Rq3 : Cf. Doc 14 où l'évolution de $i(t)$ est donnée par $u_R(t)$ (et Doc 13 pour le cas α)).

• **Commentaires :**

(1)

On peut prévoir, avant de faire les calculs, les valeurs des grandeurs, une fois le régime transitoire passé, *car le régime est alors continu.*
- En régime **continu**, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert
$\rightarrow$ D'où : $\boxed{i = 0}$ et donc $u_R = Ri = 0\ V$ pour $t \gg \tau$.
- En régime **continu**, la bobine se comporte comme un fil, donc la tension à ses bornes est nulle : $u_L = 0\ V$ et on a : $E_0 = \cancel{u_R} + u_C + \cancel{u_L} = u_C = \dfrac{q}{C}$ $\rightarrow$ Soit : $\boxed{q = CE_0}$ pour $t \gg \tau$.

CI : Ceci correspond bien au comportement asymptotique de $(\star)$ et $(\star\star)$!
Toujours penser à vérifier ce comportement par cette méthode simple.

(2)

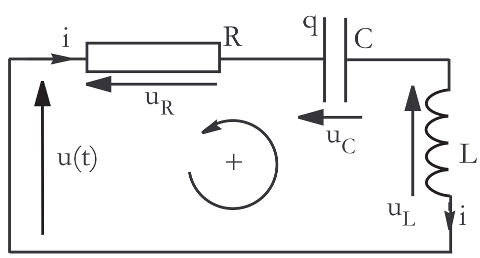
On déduit de la remarque précédente que $\boxed{\tau = \dfrac{2Q}{\omega_0} = \dfrac{2L}{R}}$ est bien l'ordre de grandeur de la **durée du régime transitoire**.

IV.3 Étude énergétique

a En régime libre :

• $\forall t$, on applique la loi des mailles :

$$u_R + u_C + u_L = 0 \;\Leftrightarrow\; Ri + \frac{q}{C} + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0$$



avec $i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$.
En multipliant l'équation par i :

$$Ri^2 + \frac{q}{C}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + Li\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0$$

Soit :

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}+\frac{1}{2}Li^2\right)=-Ri^2}$$

On a vu que :
- $\mathcal{E}_C(t)=\dfrac{1}{2}\dfrac{q^2}{C}$ est l'énergie électrostatique emmagasinée par le condensateur à l'instant t ;
- et $\mathcal{E}_L(t)=\dfrac{1}{2}Li^2$ est l'énergie emmagasinée par la bobine à l'instant t ;

→ Donc $\boxed{\mathcal{E}(t)\equiv\mathcal{E}_C(t)+\mathcal{E}_L(t)}$ est l'énergie emmagasinée dans le condensateur et la bobine à l'instant t.

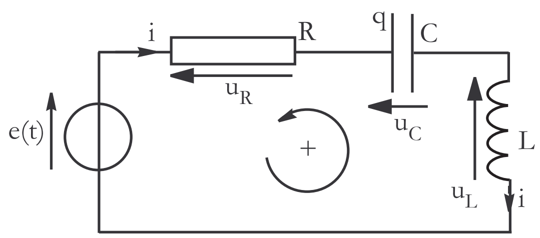
Conclusion : Lors du régime libre, l'énergie emmagasinée $\mathcal{E}(t)$ *diminue* au cours du temps : elle est dissipée par effet JOULE dans la résistance R.

$$\boxed{\frac{d\mathcal{E}(t)}{dt}=-Ri^2<0}$$

b Circuit RLC série branché sur un générateur :

• Loi des mailles : $-e+Ri+\dfrac{q}{C}+L\dfrac{di}{dt}=0$.

En multipliant chaque membre de cette équation par l'intensité i, il apparaît la puissance fournie par le générateur (supposé idéal) au reste du circuit :



$$\mathcal{P}_f=ei=Ri^2+\frac{q}{C}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}+Li\frac{di}{dt}$$

Soit :

$$\boxed{\mathcal{P}_f=Ri^2+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}+\frac{1}{2}Li^2\right)=\mathcal{P}_J+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathcal{E}_C(t)+\mathcal{E}_L(t)\right)=\mathcal{P}_J+\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}(t)}{\mathrm{d}t}}$$

• Remarque : Nous n'avons pas supposé que la *f.é.m.* était continue ; a priori elle peut être variable. Mais bien sûr, en régime permanent continu ($e(t)=E_0$), la relation précédente est vérifiée : - au bout de quelques τ, $i=0$, c'est-à-dire :
- $\mathcal{P}_J=0$ et de même $\mathcal{P}_f=0$,
- et comme $\mathcal{E}(t)=\dfrac{1}{2}CE_0^2$, on a également : $\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t}=0$.

IV.4 Retour sur le facteur de qualité Q et le régime pseudo-périodique

a Facteur de qualité Q :

• $\boxed{Q=\dfrac{L\omega_0}{R}=\dfrac{1}{RC\omega_0}}$ → ainsi : $Q\searrow$ lorsque $R\nearrow$.

• En régime *libre*, nous avons vu que : $\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t}=-Ri^2=-\dfrac{L\omega_0}{Q}.i^2$

→ Il apparaît que pour des expériences de durées Δt identiques, la perte d'énergie emmagasinée du circuit $|\Delta\mathcal{E}|\nearrow$ lorsque $R\nearrow$, c'est-à-dire lorsque $Q\searrow$.

→ Donc :
- plus R est grand et plus le circuit est *amorti*, plus il perd rapidement son énergie ;
- plus Q est grand et moins le circuit perd rapidement son énergie.

▮ Q, facteur de qualité du circuit (RLC) est un nombre sans dimension qui permet d'évaluer la capacité du circuit à conserver l'énergie qu'il a emmagasinée.

b Pertes relatives d'énergie pour un RLC série en régime libre pseudo-périodique sur une pseudo-période :

• $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_C(t) + \mathcal{E}_L(t) = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} + \frac{1}{2}Li^2$.

• Perte d'énergie sur une pseudo-période : $|\Delta\mathcal{E}| = \mathcal{E}(t) - \mathcal{E}(t+T)$.
Perte d'énergie *relative* sur une pseudo-période : $\frac{|\Delta\mathcal{E}|}{\mathcal{E}}$.

• À chaque instant t, on a : $i(t+T) = i(t)\exp\left(-\frac{T}{\tau}\right)$ et $q(t+T) = q(t)\exp\left(-\frac{T}{\tau}\right)$
→ d'où :

$$\mathcal{E}(t+T) = \frac{1}{2}\frac{q^2(t+T)}{C} + \frac{1}{2}Li^2(t+T) = \left[\frac{1}{2}\frac{q^2(t)}{C} + \frac{1}{2}i^2(t)\right]\exp -\frac{2T}{\tau} = \mathcal{E}(t)\exp\left(-\frac{2T}{\tau}\right)$$

→ d'où :

$$\frac{|\Delta\mathcal{E}|}{\mathcal{E}(t)} = \frac{\mathcal{E}(t) - \mathcal{E}(t+T)}{\mathcal{E}(t)} = 1 - e^{-\frac{2T}{\tau}}$$

Rappel de maths : $|x| \ll 1 \rightarrow\ e^x \simeq 1 + x$.

Dans le cas des « grands » facteurs de qualité [1], on a $T \equiv \frac{2\pi}{\omega} = T_0\frac{2Q}{\sqrt{4Q^2-1}} \simeq T_0$,
ce qui permet d'écrire : $\frac{2T}{\tau} \simeq \frac{2T_0}{\frac{2Q}{\omega_0}} = \frac{\omega_0 T_0}{Q} = \frac{2\pi}{Q}$.

Donc, pour $\boxed{Q \gg 2\pi}$: $e^{-\frac{2T}{\tau}} \simeq e^{-\frac{2\pi}{Q}} \simeq 1 - \frac{2\pi}{Q}$ $\longrightarrow$ D'où : $\boxed{\frac{|\Delta\mathcal{E}|}{\mathcal{E}} \simeq \frac{2\pi}{Q}}$

1. il suffit d'avoir $Q > 4$ comme on l'a vu en **IV.1.a.γ)**, Remarque(4).