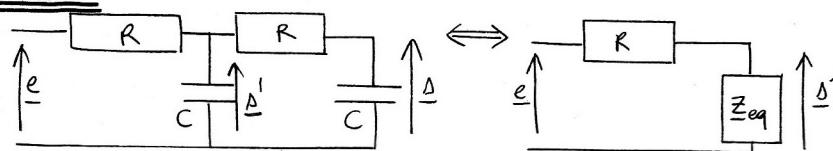


EXE5-1

$$\underline{Z}_{eq} = \left( \frac{1}{j\omega} \right) \parallel \left( R + \frac{1}{j\omega} \right) = \frac{\frac{1}{j\omega} \left( R + \frac{1}{j\omega} \right)}{\frac{1}{j\omega} + R + \frac{1}{j\omega}}$$

$$= \frac{(1+jRC\omega)}{2j\omega - R^2C^2\omega^2}$$

$$\underline{\Delta}' = \frac{1+jRC\omega}{2j\omega - R^2C^2\omega^2} \frac{1}{R + \frac{1+jRC\omega}{2j\omega - R^2C^2\omega^2}} e$$

$$= \frac{(1+jRC\omega)}{(2j\omega - R^2C^2\omega^2)R + 1+jRC\omega} e$$

$$= \frac{1+jRC\omega}{1+3jRC\omega - R^2C^2\omega^2} e$$

$$\underline{\Delta} = \frac{\frac{1}{j\omega}}{R + \frac{1}{j\omega}} \quad \underline{\Delta}' = \frac{1}{Rj\omega + 1} \quad \underline{\Delta}'$$

$$\underline{\Delta} = \frac{1}{1 - R^2C^2\omega^2 + 3jRC\omega} e \quad \rightarrow \underline{H} = \frac{\underline{\Delta}}{e} = \frac{1}{1 - R^2C^2\omega^2 + j3RC\omega}$$

$$2) \quad \underline{Z} = RC \quad \underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 - \omega^2\omega^2 + j3\omega\omega}$$

$$\underline{H}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(1-\omega^2\omega^2)^2 + (3\omega\omega)^2}} \quad \rightarrow G_{dB} = 20 \log H = -10 \log \left[ (1-\omega^2\omega^2)^2 + (3\omega\omega)^2 \right]$$

$$3) \quad \omega = 0 \quad H = 1 \quad G_{dB} = G_{dB\max} = 0 \text{ dB} \quad | \quad \text{Filtre passe-bas.}$$

$$\omega \rightarrow \infty \quad H \rightarrow 0 \quad G_{dB} \rightarrow -\infty$$

$$\hookrightarrow -10 \log \left[ (1-\omega_c^2\omega^2)^2 + 9\omega_c^2\omega^2 \right] = -3 = -10 \log 2$$

$$\text{Point } (1-\omega_c^2\omega^2)^2 + 9\omega_c^2\omega^2 = 2 \Leftrightarrow \omega_c^4\omega^4 + 7\omega_c^2\omega^2 - 1 = 0 \quad X_c = \omega_c^2\omega^2$$

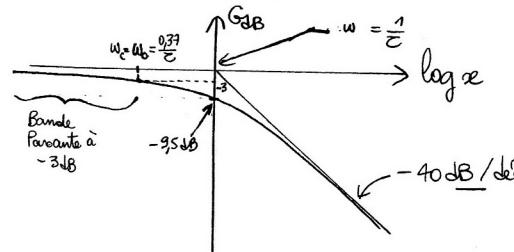
$$\Rightarrow X_c^2 + 7X_c - 1 = 0 \quad \Delta = 49 + 4 = 53$$

$$X_c = \frac{-7 + \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{(-7 + \sqrt{53})}{2} \Rightarrow \omega_c = \sqrt{\frac{\sqrt{53} - 7}{2}} = 0,37$$

$$w_c = \frac{0,374}{2} = \frac{3,74 \cdot 10^{-1}}{10^{-4}} = 3,74 \cdot 10^3 \text{ rad/s}^{-1}$$

$$\tau = 10^4 s$$

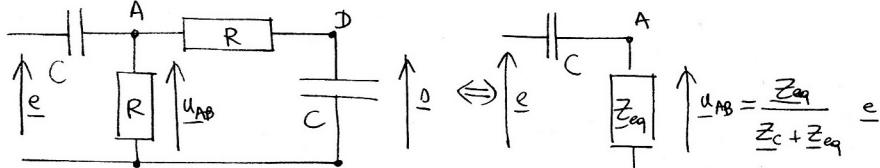
$$f_c = \frac{w_c}{2\pi} \approx 596 \text{ Hz.}$$

4) Courbe de Gain:Asymptote H<sup>te</sup> fréquence:  $\omega \rightarrow \infty \quad G_{dB} \approx -40 \log \omega \tau = G_{dB}$  (AHF)Asymptote basse fréquence:  $\omega \rightarrow 0 \quad G_{dB} \approx 0 \text{ dB} = G_{dB}$  (ABF)

Remarque: Pour un filtre  $w_c$  pulsato<sup>o</sup> de type ne correspond pas à la pulsato<sup>o</sup> associée au point d'intersection des asymptotes (c'est pour le PBas du cours d'ordre 1). Pour déterminer  $w_c$ , il faut appliquer la définit<sup>o</sup> de  $w_c$ :  $G_{dB}(w_c) = G_{dB\max} - 3 \text{ dB}$

EXE5-2.

$$1) \quad \underline{U}_{AB} \rightarrow \text{diviseur de tension} \quad \frac{\underline{\Delta}}{\underline{U}_{AB}} = \frac{\underline{Z}_c}{R + \underline{Z}_c} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$



$$\frac{1}{\underline{Z}_{eq}} = \frac{1}{R} \parallel \frac{1}{R + \underline{Z}_c} = \frac{1}{R} + \frac{jC\omega}{1 + jRC\omega}$$

$$\hookrightarrow \frac{\underline{U}_{AB}}{e} = \frac{1}{1 + \frac{\underline{Z}_c}{\underline{Z}_{eq}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{j\omega} \left( \frac{1}{R} + \frac{jC\omega}{1 + jRC\omega} \right)} = \frac{(1+jRC\omega) jRC\omega}{(1+jRC\omega) jRC\omega + 1 + jRC\omega + jRC\omega}$$

$$= \frac{(1+jRC\omega) jRC\omega}{1 + 3jRC\omega - R^2C^2\omega^2} \quad \Rightarrow H = \frac{\underline{\Delta}}{e} = \frac{\underline{\Delta}}{\underline{U}_{AB}} \cdot \frac{\underline{U}_{AB}}{e}$$

$$\underline{H} = \frac{jRC\omega}{1 + 3jRC\omega - R^2C^2\omega^2}$$

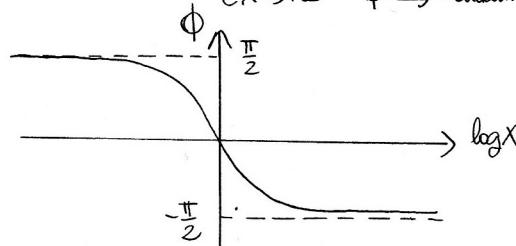
$$X = RC\omega \Rightarrow \underline{H}(jX) = \frac{jX}{1 - X^2 + 3jX} = H e^{j(\phi_s - \phi_e)}$$

filtre passe bande.

2) Déphasage :  $\phi = \phi_s - \phi_e = -\arctan\left(\frac{X - \frac{1}{X}}{3}\right)$

$$\underline{H} = \frac{1}{3 + j(X - \frac{1}{X})}$$

Asymptotes :  $X \rightarrow 0$   $\phi \rightarrow -\arctan(-\infty) \rightarrow \frac{\pi}{2}$   
 $X = 1$   $\phi \rightarrow 0$   
 $X \rightarrow \infty$   $\phi \rightarrow -\arctan(+\infty) \rightarrow -\frac{\pi}{2}$ .



Gain en décibels :

$$H = |\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{9 + (X - \frac{1}{X})^2}} \rightarrow G_{dB} = +20 \log H = -10 \log \left( 9 + \left( X - \frac{1}{X} \right)^2 \right)$$

Asymptotes :  $X \rightarrow 0$   $\log X \rightarrow -\infty$   $G_{dB} \rightarrow +20 \log X \rightarrow -\infty$   
 $X = 1$   $\log X = 0$   $G_{dB} = -20 \log 3 \approx -9.5 \text{ dB}$  Gain maximal (< 0 dB filtre PASSIF)  
 $X \rightarrow \infty$   $G_{dB} \rightarrow -20 \log X \rightarrow -\infty$

Bande passante :  $G_{dB} = G_{dB\max} - 3 \text{ dB}$

$$-10 \log \left[ 9 - \left( X_c - \frac{1}{X_c} \right)^2 \right] = 10 \log 3 - 10 \log 2 = -10 \log 18$$

$$\hookrightarrow 9 - \left( X_c - \frac{1}{X_c} \right)^2 = 18 \Leftrightarrow X_c^2 + 3X_c - 1 = 0 \quad \Delta = 9 + 4 = 13$$

$$\rightarrow \omega_2 - \omega_1 = \omega_0 (X_{c2} - X_{c1}) \quad X_{c1} = -\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{13}{4}} \quad X_{c2} = \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{13}{4}}$$

$$\boxed{\omega_2 - \omega_1 = \frac{3}{RC}}$$

### Exercice 3 : Association en cascade de filtres d'Ordre 1

1)

$$\underline{H} = \frac{\underline{A}}{\underline{E}} = \frac{\underline{M}_2}{\underline{M}_1} = \frac{\underline{M}_2}{\underline{M}} \cdot \frac{\underline{M}}{\underline{M}_1}$$

$$\frac{\underline{M}_2}{\underline{M}} = \frac{R}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega}$$

$$\frac{\underline{M}}{\underline{M}_1} = \frac{\underline{Z}}{\underline{Z} + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{jC\omega} \frac{1}{\underline{Z}}}$$

avec  $\underline{Z} = \frac{1}{Y}$

$$\frac{1}{\underline{Z}} = Y = \frac{1}{R} + \frac{1}{R} \frac{jC\omega}{1 + jRC\omega} = \frac{1}{R} + \frac{jC\omega}{1 + jRC\omega}$$

$$Y = \frac{1 + 2jRC\omega}{R(1 + jRC\omega)}$$

$$\frac{\underline{M}}{\underline{M}_1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{jC\omega} \frac{1 + 2jRC\omega}{R(1 + jRC\omega)}} = \frac{jRC\omega(1 + jRC\omega)}{jRC\omega(1 + jRC\omega) + 1 + 2jRC\omega} = \frac{jRC\omega(1 + jRC\omega)}{1 + j3RC\omega + (jRC\omega)^2}$$

$$\Rightarrow \underline{H} = \frac{\underline{M}_2}{\underline{M}_1} = \frac{\underline{M}_2}{\underline{M}} \cdot \frac{\underline{M}}{\underline{M}_1} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} \cdot \frac{jRC\omega(1 + jRC\omega)}{1 + j3RC\omega + (jRC\omega)^2} = \frac{(jRC\omega)^2}{1 + j3RC\omega + (jRC\omega)^2}$$

On pose

$\omega_0 \equiv \frac{1}{RC}$
$\alpha \equiv \frac{\omega}{\omega_0}$
$Q = \frac{1}{3}$

la pulsation propre,  
la pulsation réduite  
le facteur de qualité du filtre

$$\boxed{\underline{H} = \frac{\underline{M}_2}{\underline{M}_1} = \frac{(\jmath\alpha)^2}{1 + \jmath\frac{\alpha}{Q} + (\jmath\alpha)^2}}$$

### Autre méthode :

• loi des noeuds en termes de potentiels en A (on choisit la masse en B=E) :

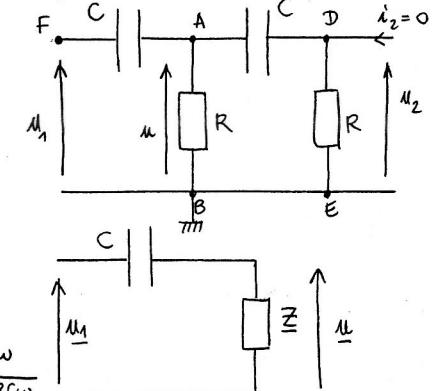
$$\frac{V_F - V_A}{jC\omega} + \frac{V_B - V_A}{R} + \frac{V_D - V_A}{R} = 0 \Leftrightarrow jC\omega(U_1 - U) + \frac{1}{R}U + jC\omega(U_2 - U) = 0$$

soit  $-U(jC\omega + \frac{1}{R}) + jC\omega U_1 + jC\omega U_2 = 0 \quad (1)$

• LNTP en D :  $\frac{V_E - V_D}{R} + \frac{V_A - V_D}{jC\omega} + \frac{U_2}{jC\omega} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{R}(-U_2) + jC\omega(U - U_2) = 0$

soit  $(\frac{1}{R} + jC\omega)U_2 = jC\omega U \quad \text{d'où} \quad U = (\frac{1}{R} + jC\omega)\frac{1}{jC\omega}U_2 \quad (2)$

$$(1) \xrightarrow{(2)} -U_2 \frac{1}{jC\omega} (jC\omega + \frac{1}{R})(\frac{1}{R} + jC\omega) + jC\omega U_1 + jC\omega U_2 = 0$$



$$\underline{U}_2 \left[ \left( 2 + \frac{1}{jRC\omega} \right) \left( \frac{1}{R} + jC\omega \right) - j\omega \right] = jC\omega \underline{U}_1$$

$$\underline{U}_2 \left[ (2jRC\omega + 1)(1 + jRC\omega) - (jRC\omega)^2 \right] = (jRC\omega)^2 \underline{U}_1$$

$$\underline{U}_2 \left( 1 + 3jRC\omega + 2(jRC\omega)^2 - (jRC\omega)^2 \right) = (jRC\omega)^2 \underline{U}_1$$

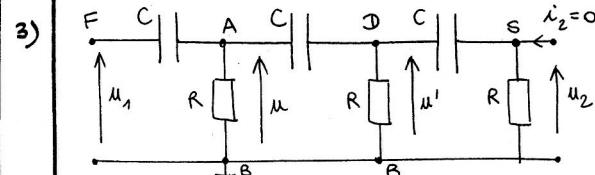
$$\underline{U}_2 (1 + 3jRC\omega + (jRC\omega)^2) = (jRC\omega)^2 \underline{U}_1$$

$$H = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{(jRC\omega)^2}{1 + 3jRC\omega + (jRC\omega)^2} = \frac{(j\alpha)^2}{1 + j\frac{\alpha}{Q} + (j\alpha)^2}$$

avec

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\omega}{\omega_0} \\ \omega_0 &\equiv \frac{1}{RC} \\ Q &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

- 2) → Il s'agit d'un filtre passe-haut d'ordre 2  
parce phénomène de résonance (puisque  $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$  : cf cours E5 !)



LNTP en A :  $\frac{V_F - V_A}{\frac{1}{j\omega}} + \frac{V_B - V_A}{R} + \frac{V_D - V_A}{\frac{1}{j\omega}} = 0$   
 $\Rightarrow jC\omega(U_1 - \underline{U}) - \frac{\underline{U}}{R} + jC\omega(U' - \underline{U}) = 0$

$$\rightarrow \underline{U} (2jRC\omega + 1) = jRC\omega(\underline{U}_1 + \underline{U}') \rightarrow \underline{U} = \frac{j\alpha(\underline{U}_1 + \underline{U}')} {1 + j^2\alpha} \quad (2)$$

avec  $\alpha = \frac{\omega}{\omega_0}$ ,  $\omega_0 = \frac{1}{RC}$

LNTP en D :  $\frac{V_A - V_D}{\frac{1}{j\omega}} + \frac{V_B - V_D}{R} + \frac{V_S - V_D}{\frac{1}{j\omega}} = 0$

$$\Rightarrow jC\omega(U - \underline{U}') - \frac{\underline{U}'}{R} + jC\omega(U_2 - \underline{U}') = 0$$

$$\rightarrow \underline{U} j\alpha = (1 + j^2\alpha)\underline{U}' - j\alpha\underline{U}_2 \rightarrow \underline{U} = \frac{(1 + j^2\alpha)\underline{U}' - j\alpha\underline{U}_2}{j\alpha} \quad (3)$$

$$(2) \& (3) \rightarrow \frac{j\alpha(\underline{U}_1 + \underline{U}')}{1 + j^2\alpha} = \frac{(1 + j^2\alpha)\underline{U}' - j\alpha\underline{U}_2}{j\alpha} \Leftrightarrow (j\alpha)^2(\underline{U}_1 + \underline{U}') = (1 + j^2\alpha)^2\underline{U}' - j\alpha(1 + j^2\alpha)\underline{U}_2$$

$$\text{Soit } [1 + j^2\alpha + 4(j\alpha)^2 - (j\alpha)^2]\underline{U}' = (j\alpha)^2\underline{U}_1 + j\alpha(1 + j^2\alpha)\underline{U}_2$$

d'où  $\underline{U}' = \frac{(j\alpha)^2 \underline{U}_1 + j\alpha(1 + j^2\alpha) \underline{U}_2}{1 + 4j\alpha + 3(j\alpha)^2} \quad (4)$

$$(1) \& (4) \rightarrow \underline{U}_2 = \frac{j\alpha}{1 + j\alpha} \underline{U}' = \frac{(j\alpha)^3 \underline{U}_1 + (j\alpha)^2(1 + j^2\alpha) \underline{U}_2}{(1 + j\alpha)(1 + 4j\alpha + 3(j\alpha)^2)}$$

$$\text{soit } (1 + 4j\alpha + 3(j\alpha)^2 + j\alpha + 4(j\alpha)^2 + 3(j\alpha)^3) \underline{U}_2 = (j\alpha)^3 \underline{U}_1 + ((j\alpha)^2 + 2(j\alpha)^3) \underline{U}_2$$

$$\underline{U}_2 (1 + 5j\alpha + 7(j\alpha)^2 + 3(j\alpha)^3 - (j\alpha)^2 - 2(j\alpha)^3) = (j\alpha)^3 \underline{U}_1$$

d'où  $H = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{(j\alpha)^3}{1 + 5j\alpha + 6(j\alpha)^2 + (j\alpha)^3}$

→ Filtre d'ordre 3  
(avec seulement des R et des C !)

### EXERCICE 5-6 Filtre de Hartley

Comme  $i_2 = 0$ , tout se passe comme si  $L_1$  et  $L_2$  sont en série.

On peut donc les remplacer par une bobine équivalente d'inductance

$$L_e = L_1 + L_2$$

Pur de Tension :  $\underline{U}_2 = \frac{jL_e\omega}{jL_1\omega + jL_2\omega} \underline{U}$

Soit  $\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}} = \frac{L_e}{L_e}$

$$H = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}} \cdot \frac{\underline{U}}{\underline{U}_1} \quad \text{Or } \frac{\underline{U}}{\underline{U}_1} = \frac{Z}{Z + R} = \frac{1}{1 + \frac{R}{Z}} = \frac{1}{1 + RY} \quad \text{avec } Y = jC\omega + \frac{1}{jL_e\omega}$$

d'où :

$$H = \frac{L_e}{L_e} \frac{1}{1 + R(jC\omega + \frac{1}{jL_e\omega})} \quad \text{Soit } H = \frac{\frac{L_e}{L_e}}{1 + j(RC\omega - \frac{R}{L_e\omega})}$$

Posons  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ,  $\alpha = \frac{\omega}{\omega_0}$  et  $Q = RC\omega_0 = \frac{L\omega_0}{R}$  et  $K = \frac{L_e}{L_e}$

alors  $H = \frac{K}{1 + jQ(\alpha - \frac{1}{\alpha})} = K \frac{j\frac{\alpha}{Q}}{1 + j\frac{\alpha}{Q} + (j\alpha)^2}$

On reconnaît la fonction de transfert d'un filtre passe-bande d'ordre 2, de pulsation de résonance  $\omega_0$ , de facteur de qualité  $Q$  et d'amplification à la résonance  $K = \frac{L_e}{L_e} = \frac{L_e}{L_1 + L_2} < 1$ .

Pour les graphes cf EXERCICE 5 et cours -