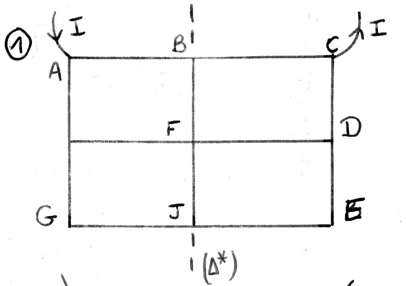
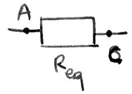
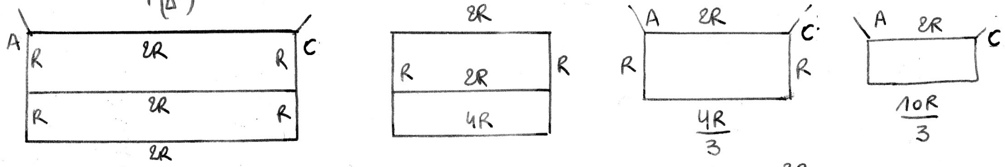
Ex-E2.7 : Résistance équivalente (2)

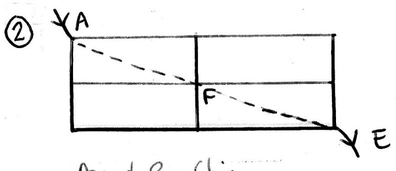
① 

l'axe (BJ) est un axe d'antisymétrie
→ $V(B) = V(F) = V(J)$
aucun courant ne circule ds les branches (BF) et (FJ)

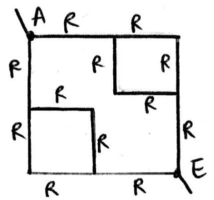


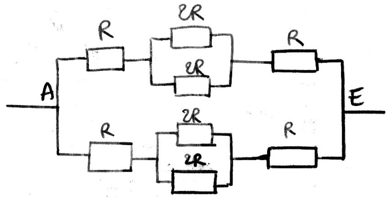
$$R_{éq} = \frac{2R \cdot \left(\frac{10R}{3}\right)}{2R + \frac{10R}{3}} = \frac{\frac{20R}{3}}{\frac{16}{3}} \Rightarrow \boxed{R_{AC} = \frac{5R}{4}}$$



② 

Axe de Symétrie



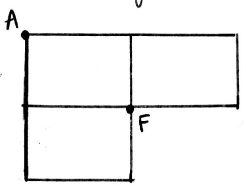


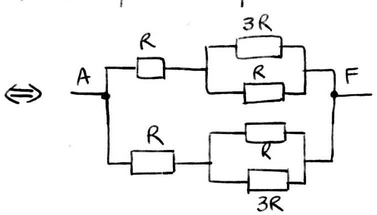
$$R_{AE} = (R + 2R // 2R + R) // (R + 2R // 2R + R) = 3R // 3R \qquad \boxed{R_{AE} = \frac{3R}{2}}$$

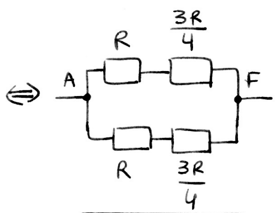
③ Réseau vu des points A et F : l'axe AFE est (cf. en b)) axe de symétrie (Δ) donc $V(D) = V(J)$ car D et J symétrique p/r à (Δ)

d'où la branche (DEJ) n'est parcourue par aucun courant.

Réseau équivalent :

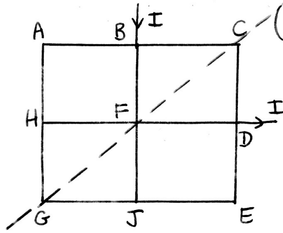




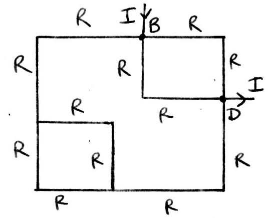


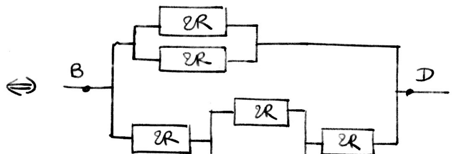
$$\boxed{R_{AF} = \frac{7R}{8}}$$

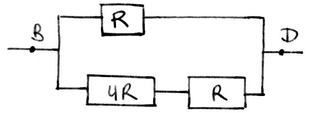
④ Réseau vu des points B et D



(Δ*) axe d'antisymétrie $V(G) = V(F) = V(C)$
on peut "étirer" le noeud F selon (CG) ; cette nouveau fil n'est parcouru par aucun courant
→ on peut le couper.

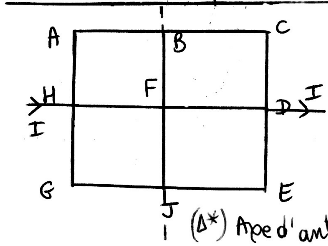






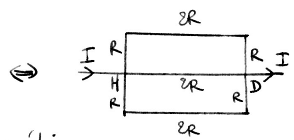
$$\boxed{R_{BD} = \frac{5R}{6}}$$

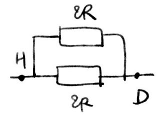
⑤ Réseau vu des points H et D :



(Δ) axe de symétrie

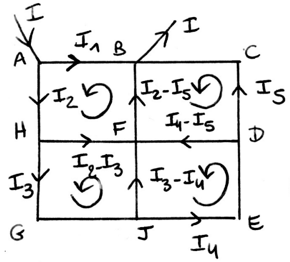
(Δ*) Axe d'antisymétrie → aucun courant traversant (BF) ou (FJ)





$$\boxed{R_{HD} = R}$$

⑥ Réseau vu des points A et B : Cette fois, il n'y a pas de symétrie !
→ Il faut utiliser une autre méthode



La résistance équivalente est $R_{éq} = R_{AB}$

d'après la loi d'Ohm :

$$U_{AB} = R_{eq}\, I = R\, I_1 \qquad \text{soit} \quad \frac{R_{eq}}{R} = \frac{I_1}{I}$$

→ il faut exprimer I est fct de I_1

Méthode : Il faut relier I_1 à I_5 (puis $R_{éq}$ à R)

5 inconnues I_1 à I_5 → 5 relat° nécessaires

Lois de Kirchoff loi des noeuds : (1) $I = I_1 + I_2$

loi des Mailles : (2) $R I_1 = R I_2 + R(I_2 - I_3) + R(I_2 - I_5)$ Maille (AHFB)

(3) $R(I_2 - I_3) = 2R I_3 + R(I_3 - I_4)$ Maille (HGJF)

(4) $R(I_3 - I_4) = 2R I_4 + R(I_4 - I_5)$ Maille (FJED)

(5) $R(I_2 - I_5) + R(I_4 - I_5) = 2R I_5$

On Simplifie par R ;

$$\begin{cases} (1) & I = I_1 + I_2 \\ (2) & I_1 = 3I_2 - I_3 - I_5 \\ (3) & I_2 - 4I_3 + I_4 = 0 \\ (4) & I_3 - 4I_4 + I_5 = 0 \\ (5) & I_2 + I_4 - 4I_5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} (2)-(4) \rightarrow \\ \\ \\ (5)+4(4) \rightarrow \end{array} \begin{cases} (2) & I_1 = 3I_2 - 4I_4 \\ (3) & I_2 - 4I_3 + I_4 = 0 \\ (4) & I_3 - 4I_4 + I_5 = 0 \\ (5) & I_2 + 4I_3 - 15I_4 = 0 \end{cases}$$

$(3)+(5) \rightarrow 2I_2 - 14I_4 = 0$

$\hookrightarrow I_2 = 7I_4$

$(2) \longrightarrow I_1 = 17I_4$

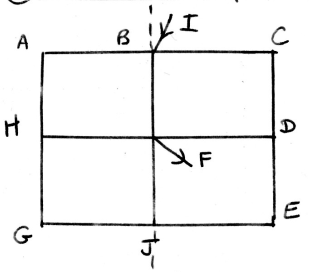
$(1) \longrightarrow I = 24I_4$

$\dfrac{I_1}{I} = \dfrac{17}{24}$

or $\dfrac{I_1}{I} = \dfrac{R_{eq}}{R}$

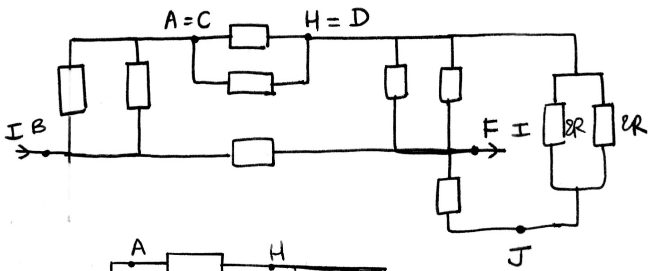
$\rightarrow \boxed{R_{éq} = R_{AB} = \frac{17}{24}R}$ ↳ C'est long et lourd → qd on peut : utiliser les symétries est préférable !

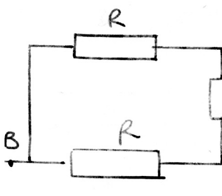
(9) Réseau vu des points B et F



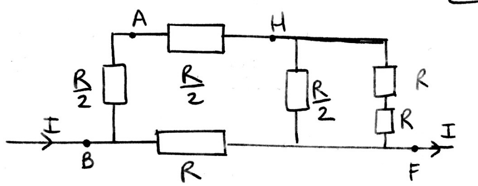
(Δ) axe de sym

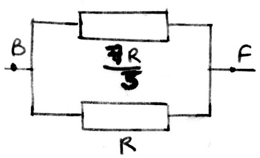
$$\rightarrow \begin{cases} V(A) = V(C) \\ V(H) = V(D) \\ V(G) = V(E) \end{cases}$$





$\frac{R}{2} // 2R = \frac{2R}{5}$

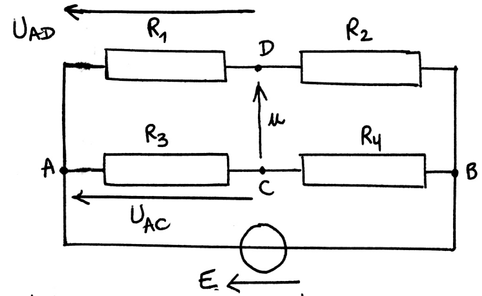




$$R_{BF} = \left(\frac{7R}{5} // R\right) = \frac{7R^2}{5}\,\frac{1}{R(1+\frac{7}{5})} = \frac{7R}{\cancel{5}}\,\frac{\cancel{5}}{12}$$

$$\boxed{R_{BF} = \frac{7}{12}R}$$

EXE2.10 Pont de Wheatstone



1)a) • $U_{AB} = E$

• R_1 et R_2 sont en série → on peut appliquer le Diviseur de tension pour exprimer U_{AD} :

$$U_{AD} = \frac{R_1}{R_1+R_2}E$$

• R_3 et R_4 sont en série → on peut appliquer le Diviseur de tension pour exprimer la tension U_{AC} :

$$U_{AC} = \frac{R_3}{R_3+R_4}E$$

D'où $u \equiv U_{DC} = U_{DA} + U_{AC} = -U_{AD} + U_{AC} \rightarrow$ $\boxed{u = \left(\frac{R_3}{R_3+R_4} - \frac{R_1}{R_1+R_2}\right)E}$ (*)

$$\boxed{u = \frac{R_2R_3 - R_1R_4}{(R_3+R_4)(R_1+R_2)}E}$$

1.b) Pour que le pont soit équilibré il faut que $u = 0$

soit $\boxed{R_1R_4 = R_2R_3 \iff R_1 = \frac{R_2R_3}{R_4} = 36{,}5\,\Omega}$

1.c) lorsque le voltmètre indique "$u = 0$" dès lors que $|u| < 1\,mV$ soit $u_{min} \leqslant u \leqslant u_{max}$

avec $\begin{cases} u_{min} = -10^{-3}\,V \\ u_{max} = 10^{-3}\,V \end{cases}$

Or comme $\frac{R_1}{R_1+R_2} \nearrow$ si $R_1 \nearrow$, on déduit de (*)

que $u \searrow$ si $R_1 \nearrow$.

donc $\begin{cases} u_{min} \iff R_{1max} \\ u_{max} \iff R_{1min} \end{cases}$

soit $u_{min} = \left(\frac{R_3}{R_3+R_4} - \frac{R_{1max}}{R_{1max}+R_2}\right)E$ et $u_{max} = \left(\frac{R_3}{R_3+R_4} - \frac{R_{1min}}{R_{1min}+R_2}\right)E$

$$\iff R_{1max} = \frac{\frac{R_2R_3}{R_3+R_4}E - R_2u_{min}}{\frac{R_4}{R_3+R_4}E + u_{min}} = 36{,}8\,\Omega \text{ et } R_{1min} = \frac{\frac{R_2R_3}{R_3+R_4}E - R_2u_{max}}{\frac{R_4}{R_3+R_4}E + u_{max}} = 36{,}2\,\Omega$$

d'où $R_{1min} \leqslant R_1 \leqslant R_{1max}$ soit $R_1 - \Delta R_1 \leqslant R_1 \leqslant R_1 + \Delta R_1$ $\boxed{\Delta R_1 = \frac{-R_{1min} + R_{1max}}{2} = 0{,}3\,\Omega}$

d'où $\boxed{R_1 = 36{,}5 \pm 0{,}3\,\Omega}$